

Dono oblatum ab A. A. P. S. Cornelio Eccles.
Dignissimo Priore Eremi Mart. Argentini.
officiis hinc 1812 d. 76

~~Dono oblatum~~

A.

Enem. H. III. 1

me.
MATHESIS

WOLFFIANA

IN USUM

JUVENTUTIS SCHOLASTICÆ

PER TERRAS HÆREDITARIAS

AUSTRIACÆ DOMUS

SUPREMA

STUDIORUM COMMISSIONE

PRÆSCRIPTA,

ET A

DIRECTORE

FACULTATIS PHILOSOPHICÆ

VIENNENSIS

IN COMPENDIUM REDACTA

ANNO MDCCLXXVI.

complectens

ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, ET
TRIGONOMETRIAM, UNA CUM ALGEBRA
AD UNAMQUAMQUE HARUM PARTIUM
APPLICATA.

Jo. Thom. Nob. de Trattner
typogr. et bibliop.

VINDOBONÆ,

Typ. JOANN. THOMÆ NOB. DE TRATTNERN,

CÆS. REG. AULÆ TYPOGR. ET BIBLIOP.

1776

MA 3 H 218

W O T 1 3 2 A

UNITED STATES OF AMERICA

ALFRED W. JACOBUS

NEW YORK

THE NEW YORK COMMISSION

REPORT

ON THE

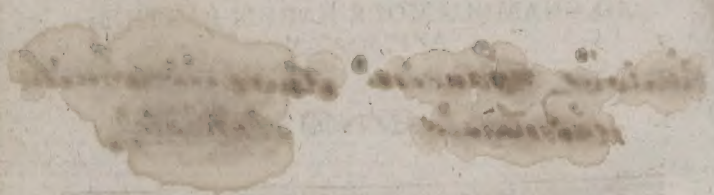
PROCEEDINGS

OF THE

COMMISSION

ON THE

PROCEEDINGS



ALFRED W. JACOBUS

NEW YORK

1880

PRÆFATIO.



U t Compendium hoc nil nisi Wol-
fiana complectatur (nam pau-
ca tantum invenies, quæ, ne
veritatum in eo contentarum
nexus, & præfixus ordo interrumpetur,
compendii gratia erant immutanda) præ-
fationis quoque loco, non mea, sed
Authoris celeberrimi verba, quæ *Tom.*
V. Element. Mathes. Univer. Cap. II. de mo-
do instituendi studium Matheseos intellectus
perficiendi causa, sparsim leguntur, huc
transcribere decrevi;

„ Sunt qui sibi aliisque persuadere co-
nantur, quasi methodus mathematica
Philosophiæ minus conveniat, multo au-
tem adhuc minus in Theologia, Juris-
prudentia & Medicina eidem locus sit.
Equidem hoc dubium jam sustulimus in
Discurso præliminari, quem logicæ præ-
misimus *de Philosophia in genere*, ubi (§.
139.) identitatem methodi philosophicæ

P R Æ F A T I O.

ac mathematicæ demonstravimus, ex nostra tamen definitionum & demonstrationum propositionum analyfi singulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifestum est, omnem & veram methodum mathematicam huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus usum in veritate cognoscenda, qui ad evidentiam requiritur, qua veritas indubitato agnoscitur. Hinc manifestum est, non alias homini esse facultates, quibus in cognoscendis Mathematicis utitur, quam quibus opus habet ad cognoscendam veritatem quamcunque aliam; nec alium esse facultatum earundem usum in Mathesi addiscenda, vel etiam in veritatibus Mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, sive ab aliis inventa fuerit, sive demum nostra opera detegenda. Mathesis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoscendi usus fieri debeat, si ad liquidam veritatis cognitionem

P R Æ F A T I O.

nem pervenire decreveris, id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abstrahi possunt, ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas sit lapis Lydius genuinæ Logicæ. Qui igitur in ea sunt opinione, quasi Mathesis propriam sibi habeat methodum, quæ extra eam nullius sit usus, hi aut methodi mathematicæ vim ac potestatem, aut genuinum facultatum cognoscendi ad certam veritatis cognitionem consequendam usum, aut utrumque ignorant. Denique nostra Mathematicum tractatio manifesto loquitur, eum, qui in Mathesi addiscenda præscriptum a nobis morem observat, sequi modum cogitandi maxime naturalem. Quis igitur adeo vesanus est, ut sibi persuadeat, usum facultatum aliis legibus accommodandum esse in Philosophia, Theologia, Jurisprudencia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

„ Etsi autem Mathesis universa faciat ad intellectum perficiendum, si secundum ve-

P R Æ F A T I O.

ram methodum tractetur ; quoniam tamen non omnibus tantum suppetit temporis spatium , quantum huic labori sufficit , unusquisque eousque progredi poterit quantum conceditur. *Arithmeticae* autem & *Geometriae* pertractatio prorsus indispensabilis est , quæ si studio Logicæ præmittatur (aut eidem jungatur) & in Mathefi juxta Philosophiam pergere volueris , futurum certus sum , ut studium Mathefeos ac Philosophiæ sibi mutuo lucem affundant.

„ Supponimus autem Philosophiam eadem methodo esse conscriptam , qua in Elementis nostris matheseos utimur ; quemadmodum fecimus in operibus nostris philosophicis Latino inprimis idiomate conscriptis ; quæ , si non ante ulterius progredi volueris , quam singula rite intellexeris , ac veritatis eorum convictus fueris , multo minore temporis spatio perlegere poteris , quam breve quoddam compendium communi more conscriptum , modo in pertractanda Arithmetica &

Geo-

PRÆFATIO.

Geometria industriam tuam desiderari passus non fueris.

„ Cum adeo inter fines, qui per studium Matheſeos intendi poſſunt, emineat perfectio intellectus: quæ conſiſtit in habitu rectum faciendi facultatum cognoscendi uſum in veritate cognoscenda; hunc finem intendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoscibilem adſpirant: ſive philoſophari voluerint, ſive Theologiæ, Jurisprudentiæ ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de cauſa veteres neminem ad Philoſophiam addiſcendam admittere voluerunt, niſi Geometriæ peritum: cum olim Geometria ſola accurata methodo traderetur. Optandumque erat, ut idem mos in ſcholas noſtras introduceretur.

„ Sed non nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, accuratæ methodo, qua traduntur Mathematica, fruſtus debetur. Ejus adeo participes non ſiunt, qui methodum accuratam inſuper habent. Quamobrem cum Mathematicis

PRÆFATIO.

thesis perficiendi intellectus causa potissimum in scholas sit introducenda, parum adolescentibus & juvenibus consulunt, qui, ut desidiosis placeant, methodi nullam rationem habent, sibi magis quam ipsis prospicientes.





DE
M E T H O D O
M A T H E M A T I C A
BREVIS COMMENTATIO.



§. I.

§ Per *Methodum Mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiantur autem Mathematici a definitionibus; inde ad axiomata & postulata, in Mathesi mixta ad experientias seu observationes, progrediuntur; his tandem theoremata & problemata superstruunt: ubique vero corollaria & scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

Wolf. Mathes. P. I. A §. 4.

2 DE METHODO MATHEMATICA

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cuiuslibet in mente repræsentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus *Leibnitius*: (*) quæ, quanti sit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit, e. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est e. gr. plantæ, ad cuius conspectum dubitas, utrum ea sit nec ne, quam alio tempore alibi videras & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis, e. gr. quod circulus sit figura linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. 9. *Confusa* est *notio clara*, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est e. gr. *notio coloris rubri*.

§. 10. *Distincta notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris, e. gr. *notio circuli paulo ante tradita* censetur adæ-

(*) In Actis Eruditorum An. 1684. P. 537.

adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedi, distantia æqualis & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præsentī tamen non explicandos.

§. 12. *Inadæquata est notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, non nisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ, &, quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit, adæquata.

§. 14. Hinc in definitionibus subsequen-
tibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia sit necesse est, ut vel præsentem, quodcumque libuerit, percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est

4 DE METHODO MATHEMATICA

quadrati, si figura quadrilatera, æquilaterra, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesis, hoc est, modum, quo fieri potest, exponens: Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Definitiones tam reales, quam nominales cum in se considerari, tum inter se conferri possunt. Quicquid ex consideratione eorum, quæ in una definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, si quid rei convenire aut non convenire enunciet; *Postulatum* vero, siquid effici posse affirmet vel neget. E. gr. Ex genesis circuli liquet, omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter se æquales esse, cum unam eandemque lineam in diverso situ referant. Hæc adeo propositio in axiomatum numero habetur. Ast dum per eandem definitionem intelligitur: ex quovis puncto quovis intervallo circulum describi posse: id inter postulata collocatur.

§. 20. Quoniam igitur axiomatum & postulatorum veritas per intuitum definitionum, ex quibus fluunt, cognoscitur; demonstratione nulla indigent. Vera enim esse intelliguntur, quam primum realitas definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *propositiones per se notæ* item *ex terminis manifestæ* dicuntur.

§. 21.

§. 21. Multi hac axiomatum proprietate abutuntur, dum præmissas syllogismorum, quas probare nesciunt, pro axiomatibus venditant.

§. 22. Notandum nimirum, eo minorem fieri axiomatum numerum, quo sufficientius notiones evolvuntur. Immo si verum fateri fas est, vera axiomata non sunt nisi propositiones identicæ.

§. 23. Cum axiomatibus & postulatibus etiam experientiæ nonnunquam confunduntur. *Experiri* autem dicimur, quicquid ad perceptiones nostras attenti cognoscimus, e. gr. dum accensa candela conspicua fieri videmus, quæ ante non apparebant.

§. 24. Experientiæ itaque sunt rerum singularium, quoniam nonnisi res singulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans casum singularem in medium proferre tenetur, nisi vel sensui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Mathesi exactissime observatur. Neque enim e. gr. in Astronomia Solis orientis & occidentis observationes recensentur, utpote quotidianæ ac omnibus satis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum observationes a diversis Astronomis tempore diverso diversisque instrumentis celebratæ fideliter referuntur, cum non in cujusvis potestate existant.

§. 25. Propositio theoretica ex pluribus definitionibus inter se collatis eruta *Theorema* appellatur. E. gr. Si in Geometria triangulum cum parallelogrammo super eadem basi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipsis eorundem definitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis infertur; parallelogrammum esse trianguli duplum: ea propositio in theorematum numerum referenda.

§. 26. Duo autem sunt, quæ in omni theoremate attentionem merentur, *Propositio* nempe atque *Demonstratio*. Ista quidem enunciatur, quid rei cuiusdam sub certis conditionibus convenire possit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipsi convenire concipere valet.

§. 27. Absolute possibile non est nisi ens a se: reliqua vero omnia tantum admissio alio possible esse intelliguntur, hoc est, nil eorum est sine quadam conditione. Hæc igitur in propositione una exprimenda. E. gr. Triangulum est dimidium parallelogrammi, si bases & altitudines fuerint sigillatim æquales. In propositione itaque tam basium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet propositio in *Hypothesin* & *Thefin* commode distinguitur: quarum ista conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complecti-

plectitur, quod vel affirmatur, vel negatur. E. gr. In propositione allata hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super æquali basi & ejusdem altitudinis existant*; thesis autem, *illud hujus dimidium est*.

§ 28. Notandum vero, si in ipsa rei definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, hypothesin distincte non exprimi. E. gr. Si tres in triangulo anguli 180. graduum dicantur; hypothesi carere videtur propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 29. Datur autem in propositione affirmativa necessarius nexus inter hypothesin atque thesin: in negativa autem nullus concipi potest, sed hæc illi repugnat. Quoniam scilicet in subiectoprehenditur, quod hypothesis involvit; ei quoque convenire debet, quod in thesi continetur. E. gr. In hoc theoremate, quod *triangulum sit dimidium parallelogrammi super eadem basi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus basin & altitudinem basi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein asserimus,

quod sit parallelogrammi dimidium. Posterius concipitur propter prius.

§. 30. Nexum inter thesin & hypothesin in propositionibus affirmativis; repugnantiam in negativis *demonstratio* manifestat. Eorum igitur definitiones, quæ in hypothesi ac thesi continentur, eorundemque proprietates ex istis derivatæ aut aliunde cognitæ demonstrationum principia existunt. Quoniam vero in Matthesi principia non admittuntur nisi quæ ante fuerunt evicta; definitiones ac propositiones, quibus demonstrationes superstruuntur, citari solent, partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris constet, unde ipsorum certitudo haurienda.

§. 31. Enimvero citationes definitionum, axiomatum, postulatorum theorematum & problematum non exiguum habent usum, nec sine ratione in Matthesi singulis cogitationum generibus singula nomina imponuntur. Demonstratio namque non convincit nisi principiis demonstrandi extra dubitationis aleam positis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera supponenda sint, antequam veritatis propositionis datæ convinci possis.

§. 32. Non alia vero est ratio ex principiis conclusiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis logicis, ubi de syllogismo agitur, dudum exposita. Sunt enim

enim demonstrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita, ut omnia vi syllogismorum concludantur, omillis saltem præmissis, quæ vel sponte meditati occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut sit demonstratio, præmissæ syllogismorum novis syllogismis tamdiu probandæ sunt, donec perveniatur ad syllogismum, in quo præmissæ sunt vel definitiones, quas jam constat esse possibiles vel propositiones aliæ identicæ.

§. 33. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus constant, *Propositione* scilicet, *Resolutione* ac *Demonstratione*. In propositione, quid fieri debeat, indicatur. In resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur, quod erat faciendum. Denique in demonstratione evincitur, factis iis, quæ resolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque problema demonstrandum, in theorema convertitur, cujus hypothesin resolutio, thesin vero propositio constituit. Generalis enim omnium problematum demonstrandorum (ut jam innuimus) tenor hic est: Factis iis, quæ resolutio præcipit, illud quoque efficitur, quod erat faciendum. Quare non opus est, ut de problematibus plura dicantur.

§. 34. Rationes subinde non desunt, cur ad casus speciales applicentur pro-

sitiones generales, & ex quibusdam propositionibus sæpe alias prona consequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruntur propositiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 35. Primum corollariorum genus demonstratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in universum casibus demonstratum fuit, de hoc vel isto in specie, ut denuo demonstretur, opus non est. E. gr. Ubi de omnibus triangulis ostensum, tres angulos eorum una sumtos duobus rectis æquari; idem in specie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Ast alterum corollariorum genus demonstrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis propositionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. E. gr. Si theoremati, cuius modo mentionem feci, hoc corollarium subjungatur; *in triangulo rectangulo unus saltem actu rectus esse potest*: ratio illationis non negligenda, quod scilicet, positis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 36. In *Scholiis* denique tam definitionibus, quam propositionibus earumque corollaribus subungi solitis, obscura declarantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, &, si qua alia scitu nec injucunda, nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. 37. Explicatam hætenus methodum qui probe perpendit, ejus universalitatem haud dubie agnoscet, nec diffitebitur, sine ea ad solidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam posse. Dicitur vero *Methodus Mathematica*, immo sæpius *Geometrarum methodus*, quia huc usque Mathematici fere soli, in Geometria imprimis, ejus leges sancte custodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis disciplinis applicare studuerunt; conatui tamen ipsorum eventus minime respondit. Etenim nunc notiones non satis evolverunt, nunc sine probatione assumerunt, quæ maxime probari debebant, nunc per saltum ratiocinati sunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri possunt.

§. 38. Explicatæ methodi legibus cum ex asse satishat in Mathesi præsertim pura, non ex vano prædicatur, quod Mathematica judicium acuant, hoc est, quod eorum cultores promptitudinem acquirant, veritatem quamlibet, ad quam cognoscendam animum appellant, accuratius, quam alii solent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus. quale demonstrationum mathematicarum meditatio cenferi debet.

§. 39. Fructus igitur, quem ex studio Matheseos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri solitas, addiscunt. Licet enim in vita communi utiles existant; neminem tamen iudicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per §. præc.* hæc non, nisi a seria demonstrationum meditatione, expectare licet.





ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT I.

DE

PRINCIPIIS ARITHMETICÆ.

DEFINITIO I.

I. *Arithmetica* est numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut, si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6. & 8. junctim sumtis æqualis est.

DEFINITIO II.

2. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat.

DEFINITIO III.

3. *Unitas* est abstractum per quod dicimus unum.

DEFINITIO IV.

4. *Unitates eadem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversæ* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLIION.

5. Ponamus e. gr. *A* esse globum lapideum, *B* similiter esse globum lapideum alium: erunt *A* & *B* unitates eadem. Sed si *A* fuerit globus lapideus, *C* plumbeus: erunt *A* & *C* unitates diversæ. Quod si *A*, *B* & *C* tantum ut globos consideres, erit etiam *C* eadem unitas cum *A* & *B*.

DEFINITIO V.

6. Si *A* sit idem cum *B*, *C* & *D* simul sumtis, dicetur *A* Totum; *B* vero, *C* & *D* dicentur ejus Partes, & intuitu partis *B*, reliquas *C* & *D* &c. Complementum ad Totum vocabimus.

DEFINITIO VI.

7. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, Numerus dicitur.

SCHOLIION I.

8. Nempe si pro unitate linea recta sumatur; numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in Geometria & Analyfi abunde patebit.

SCHOLIION II.

9. Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros cum integros, tum fractos tam rationales, quam irrationales comprehendere valeamus.

DEFINITIO VII.

10. Numerus determinatus est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. Indeterminatus est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas*.

SCHOLIION.

11. In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodsi quaesiveris, quanta ea sit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumit & illius ad hanc relationem quaerit, ac pro diversa unitate assumpta. per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.

DEFINITIO VIII.

12. *Aequalia* sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. Inæqualia sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

13. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest, quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest, alteri æquale est (§. 12.); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

14. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 12.); erit idem alterius parti æquale.

HYPO.

16 ELEMENTA ARITHMETICÆ

HYPOTHESIS I.

15. *Signum æqualitatis est* $=$.

DEFINITIO IX.

16. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

17. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 13.) & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 14.); inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 16.).

HYPOTHESIS II.

18. *Signum majoritatis est* $>$; *minoritatis* $<$.

DEFINITIO X.

19. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum per quæ res a se invicem discerni debent.

COROLLARIUM I.

20. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero, modo sit istiusmodi, ut sine alio assumpto intelligi possit.

Co.

COROLLARIUM II.

21. Cum quantitas sine alio assumpto per se non intelligi, sed tantum dari possit (§. 10. II.); Similia, salva similitudine, quantitate differre possunt (§. 20.), atque adeo quantitas est discrimen internum simillium.

HYPOTHESIS III.

22. *Signum similitudinis est ∞ .*

DEFINITIO XI.

23. *Pars aliquota est, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. Pars vero aliquanta est, quæ repetita aliquoties semper vel major, vel minor est,*
toto

DEFINITIO XII.

24. *Commensurabilia sunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum est pars aliquota alterius. Incommensurabilia sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.*

DEFINITIO XIII.

25. *Numeri inter se homogenei sunt, qui ad eandem; heterogenei: qui ad diversas unitates referuntur.*

DEFINITIO XIV.

26. *Numerus integer* est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XV.

27. *Numerus fractus* est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Licitur is etiam *Fraçtio*, itemque *Mi- nutia*.

DEFINITIO XVI.

28. *Numerus rationalis* est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *ef- fabilis*.

DEFINITIO XVII.

29. *Numerus irrationalis sive surdus* est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometri- cus*.

HYPOTHESIS IV.

30. *Si in numerando ad denarium per- venit, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una expri- matur.*

COROLLARIUM.

31. Decem ergo nominibus opus est ad de- cem numeros rationales primo indigitandos & præterea aliis, quibus decadam multitudo de- notetur, & ita porro.

DE-

DEFINITIO XVIII.

32. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt: *unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem*. Idem numeri generali *Unitatum* nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; sex *Sexaginta*; septem *Septuaginta*; Octo *Octoginta*; novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius ejusque quævis multipla dicentur *Articuli*.

SCHOLIUM.

33. Vocibus *millionum, billionum, trillionum* &c. utimur ad confusionem in numeris magnis evitandam, quorum distinctis notionibus formandis inseruiunt.

HYPOTHESIS V.

34. Notæ numericæ constituentur novem sequentes: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Ut vero non solum unitates, sed & decades, centenarios, millenarios &c. indig-

tare possumus, valor ipsis tribuatur localis, ita ut solitariae vel in loco dextimo positæ unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra 0, quæ scilicet sit Nullitatis nota.

COROLLARIUM I.

35. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiant:

Unitates	}	Simplices.
Decades		
Centenarii		
Unitates	}	Millenariorum.
Decades		
Centenarii		
Unitates	}	Millionum.
Decades		
Centenarii		
Unitates	}	Millenariorum Millionum.
Decades		
Centenarii		
Unitates	}	Billionum.
Decades		
Centenarii		
Unitates	}	Millenariorum Billionum.
Decades		
Centenarii		
Unitates	}	Trillionum.
Decades		
Centenarii		

Unitates	} Millenariorum Trillionum &c.
Decades	
Centenarii	

P R O B L E M A I.

36. Numerum scriptum enunciare, hoc est, cuilibet characteri valorem competentem assignare.

R E S O L U T I O.

1. Numerus propositus per commata dividatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima classis tertiæ notetur lineola transversa apici adscribenda; dextima classis quintæ duabus; dextima septimæ tribus &c.
3. Comma solitarium per millenarios, lineola transversa una per millones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero finistima classis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 35.). Sic factum est, quod petebatur.

E. gr. Numerus sequens.

2^{III}, 125, 473^{II}, 613, 578^I. 432, 597
ita enunciat: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadringentis septuaginta tribus billionibus, sexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis septuaginta octo millionibus, qua-

dringenta & triginta duo millia , quingenta
& nonaginta septem.

S C H O L I O N.

37. *Quantum conveniens terminorum usus in rebus
distincte concipiendis, seu ex confusione extricandis
vires intellectus humani extendat; abunde perspicient
oculationes, si ad præsens problema fuerint satis at-
tenti.*

HYPOTHESIS VI.

38. *Quantitates aut numeros indeterminatos literis Alphabeti minoribus a, b, c &c vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

HYPOTHESIS VII.

39. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quarum alter alteri interjecta lineola subscribitur. Eorum inferior, seu Denominator, indicat unitatem seu totum in partes divisum; superior vero, seu Numerator, numerat partes in casu proposito datas. E. g. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita scribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3. indicat, lineam esse in tres partes æquales divisam; numerator 2. vero duas istiusmodi partes assignat.*

DEFINITIO XIX.

40. *Additio est inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis*

neis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *summandi*: quæsitus autem *summa* vel *aggregatum*.

COROLLARIUM.

41. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis & contra.

HYPOTHESIS VIII.

42. *Signum additionis est +, quod per plus efferrî solet.* Ita $3 + 4$ denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciat: 3 plus 4.

DEFINITIO XX.

43. *Subtractio est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est.* Numerus, qui subducitur dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo subtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Residuum*.

HYPOTHESIS IX.

44. *Signum Subtractionis est -, quod per minus efferrî solet.* E. gr. $7 - 3$ denotat differentiam inter 3 & 7, pronunciat: 7 minus 3.

DEFINITIO XXI.

45. *Multiplicatio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *efficientes*; quæsitus *Factum*, item *Productum*. In specie factorum alter, qui aliquoties sumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat, quoties ille sumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

46. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties sumto æqualis (§. 45.), istiusmodi autem inventio non est nisi iterata additio (§. 41.); multiplicatio est iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

47. *Signum multiplicationis* est punctum unicum (.) inter factores duos medio loco positum, quod per multiplicatum effertur. E. gr. 4. 3. denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9 factum, cujus factores sunt 7, 5 & 9. *Litteræ sine ullo signo junguntur*. E. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*.; *b c d* factum, cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO XXII.

48. *Divisio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties con-

tine-

tinetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *dividendus*; alter, per quem fit divisio, *divisor*; qui denique indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLIUM I.

49. In multiplicatione & divisione opus non est, ut numeri dati sint homogenei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur (§. 40. 43.)

HYPOTHESIS XI.

50. *Signum divisionis sunt duo puncta (:)* quæ per divisum efferrî solent. E. gr. $3:4$ denotat quotum ex divisione 8 per 4 emergentem Similiter $a:b$ est quotus ex divisione a per b prodiens.

DEFINITIO XXIII.

51. Numerus *par* est, qui bifariam sive per 2 dividi potest, ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXIV.

52. Numerus *impar* est, qui a pari unitate differt, ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO XXV.

53. Numerus A *metiri* vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B , si eum ita dividit, ut quotus sit numerus integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

B 5 DE-

DEFINITIO XXVI.

54. *Numerus primus in se est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.*

DEFINITIO XXVII.

55. *Numerus compositus est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.*

DEFINITIO XXVIII.

56. *Mensura numeri est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensura numeri 8. Mensura maxima numeri est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.*

DEFINITIO XXIX.

57. *Mensura communis duorum plurimve numerorum est numerus, qui singulos figillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. Maxima dicitur, si fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24, 3 vero numerorum 9 & 12.*

DEFINITIO XXX.

58. *Numeri primi inter se sunt, qui nullam communem mensuram habent, præ-*

præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

DEFINITIO XXXII.

59. *Numeri compositi inter se sunt, qui præter unitatem communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.*

AXIOMA I.

60. *Idem est æquale sibimetipsi.*

SCHOLION.

61. *Hujus axiomatis amplissimus est in Analyse usus.*

AXIOMA II.

62. *Quantitates homogeneæ aut æquales sunt aut inæquales (§. 12.)*

AXIOMA III

63. *Totum est majus qualibet sua parte.*

AXIOMA IV.

64. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.*

AXIOMA V.

65. *Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia; ea sunt æqualia inter se.*

AXIO-

AXIOMA VI.

66. Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas, aggregata ($A + C$ & $B + D$) sunt æqualia.

AXIOMA VII.

67. Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero æqualium majus vel minus est.

AXIOMA VIII.

68. Si majori (B) & minori (A) idem (C) vel æqualia addas, aggregatum prius ($B + C$) majus est, posterius vero ($A + C$) minus. Quod si majori (B) majus (C) & minori (A) minus (D) addas, aggregatum prius ($B + C$) majus est; posterius ($A + D$) minus.

AXIOMA IX.

69. Si æqualia (A & B .) ab æqualibus (C & D) subtrahas, quæ relinquantur ($C - A$ & $D - B$) æqualia sunt.

AXIOMA X.

70. Si a majore (A) & minore (B) idem (C) vel æqualia subtrahas; residuum prius ($A - C$) majus est; posterius ($B - C$) minus.

AXIO-

AXIOMA XI.

71. Si α qualia ($A \& B$) per α qualia ($m \& n$) multiplices; facta ($m A \& n B$) α qualia sunt.

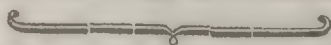
AXIOMA XII.

72. Si α qualia ($A \& B$) per α qualia ($C \& D$) dividas; quoti ($A : C \& B : D$) α quales sunt.

CAPUT II.

DE

SPECIEBUS ARITHMETICÆ
IN NUMERIS INTEGRIS.



PROBLEMA II.

73. *N*umeros quocunque datos addere.

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei sub homogeneis, hoc est, ita scribantur, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. respondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & summa earum ipsis subscribatur.

4. Quod.

4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadam vero summa sub decadibus collocanda.

5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata habebitur summa quæsitæ.

E. g. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 4 & 3 sunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur
 3578A
 524B
 63C
 ———
 4165
 que 1 (sc. decas) & 6 (decades) sunt 7. (decades): additis 2, prodeunt. 9; additis porro 7 habentur 16 (decades). Collocentur 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (centenarii) 6. &, additis adhuc 5 prodeunt 11 (centenarii). Collocetur 1 subcentenariis datis & 10 centenarii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 millenariis datis, summaque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quæsitæ
 4165.

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum sint partes eorundem (§. 35.); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 6.) Liqueat vero ex operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis, mil-

le-

lenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 64.), adeoque summa eorundem est (§. 40.). Q. e. d.

S C H O L I O N.

74. Nec abssimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex serie nimirum speciei minoris toties colligitur valor speciei proxime majoris, quoties fieri potest & pro unoquoque unitas reponitur in serie proxime majore. E. gr. sint expensa:

Januarii	45thal.	16gross.	9num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6

erit summa 415 5 9

Cum enim 12 nummi conficiant grossum, in serie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9 valor grossi colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur seriei grossorum. Similiter quoniam thalerus 24 grossis constat, in serie grossorum, ut ante valor thaleri ter colligitur, relinquitur 5. Quare denuo 5 in loco grossorum reponantur & 3 thaleris communerantur. Reliqua ut in problemate peraguntur.

COROLLARIUM I.

75. Si omnes numeri dati unitatum instar considerentur, evidens, est, inter summandum
tot

tot novenarios omitti, quot unitates ex summa seriei exterioris in sinisteriorem transferuntur. Sic in exemplo problematis loco *quindécim* sub unitatibus scribimus 5, sub decadibus 1, quorum numerorum instar unitatum consideratorum summa est 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadam una rejicitur decas. Similiter si summa unitatum *viginti septem*; sub unitatibus collocamus 7, sub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadam rejiciuntur. Hinc solvitur.

PROBLEMA III.

76. *Examinare additionem, hoc est, explorare utrum numerus inventus sit æqualis omnibus datis simul sumtis, nec ne.*

RESOLUTIO.

- I. Notentur a latere numeri. qui inter addendum ex serie qualibet dexteriori in proxime sinisteriorem rejiciuntur, & operatione absoluta addantur, ut numerus novenariorum inter summandum omissorum innotescat (§. 75.)
2. Abjiciatur præterea ex summa inventa novenarius, quoties fieri potest, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter summandum omissorum: quæ summa una cum numero residuo, si quis fuerit, probe notetur.

3. Tandem ex numeris summandis, qui omnes tanquam unitates spectantur, novenarius abjiciatur, quoties fieri potest, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero residuo, si quis fuerit, denuo notetur.

Quodsi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis simul sumtis (§. 6.); consequenter additio rite peracta (§. 40.). *Q. e. i. & d.*

E. gr. In exemplo problematis inter summandum 3. novenarii onstantur & ex summa reperta unus adhuc deleri potest: quo facto, relinquuntur 7. Sed si ex numeris summandis 4 novenarii abjiciantur, 7 similiter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

77. Vulgo præcipiunt, ut tam ex summa, quam aggregantis, notis singulis instar digitorum consideratis, abjiciatur novenarius, & ex residui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum examen tum fallere possit, quando error novenarium vel ejus multipulum adæquat; ideo aliquantisper idem immutari, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia sunt examina, etsi non omnes errores detegant, modo iisdem sese non subducant, qui frequentius admittuntur.

PROBLEMA IV.

78. Numerum minorem e majore subtrahere.

Wolf. Mathes. P. I. C RESO-

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori sub-
scribatur, ut homogenei homogeneis
respondeant, quemadmodum in additio-
ne præcepimus (§. 73.).
2. Sub numeris hisce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur sigillatim unitates ab
unitatibus, decades a decadibus, cen-
tenarii a centenariis &c. & residua sin-
gula loco conveniente infra lineam
scribantur, nempe residuum unita-
tum sub unitatibus, decadam sub de-
cadibus &c.
4. Quod si nota major e minore veniat
subtrahenda, ex sinistriori loco in
dexteriores transferatur unitas, quæ
(§. 35.) hic 10 valebit, ut subtractio
fieri queat. Numerus vero unitate
multatus puncto notetur, ne ipsum
multatum esse obliviscamur,
5. Si in loco sinistriori cyphram repe-
riri contingat, unitas a numero pro-
xime sequente mutuetur, puncto prop-
terea notando, ut ipsum unitate mi-
nutum esse constet. Unitas vero illa
in locum dexteriores translata deca-
dis valorem tuebitur (§. 35.). Quamob-
rem ubi plures cyphræ sese insequun-
tur, omnes hac ratione in novenarios
mutentur, & numerus minor, a quo
subtractio fieri debet, decade augea-
tur.

Juxta

CAP. II. DE SPECIEBUS ARITHM. 35

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore subtrahere licet.

E. gr. Si ex 98.0.0.4.0.34.59
subtrahas 4743865263

Differentia est 5056538196

Dentis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates infra lineam scribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 subducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde si 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum Subductis jam 5 ex 13, residui sunt millenarii 8 Dentis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam, si 8 ex 3 subtrahere debes, ab 8 sinisterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem subtractio facillime absolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, si unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris subducas, *vi operationis,*

36 ELEMENTA ARITHMETICÆ.

nis, hoc est, si singulas partes numeri minoris a singulis partibus majoris subtrahas (§. 35.). Sed singulæ partes numeri minoris simul sumtæ sunt numero minori, & partes singulæ majoris simul sumtæ sunt majori æquales (§. 64.). Ergo idem relinqui debet numerus, si totum numerum minorem a toto majore subtrahas (§. 69. Q. e. d.

SCHOLION I.

79. Si numeri heterogenei fuerint a se invicem subtrahendi; unitas mutuo petita non 10, sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.

E. gr. 45. thal. 16. gr. 6. num.

27 23 9

17 thal. 16 gr. 9 num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 subtrahi nequeant, ex 16 grossis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18. relinquuntur 9. Similiter cum 23 grossi ex residuis 15 au'vri nequeant; ex 45 thaleris unus ablati in 24 grossos convertitur: unde si subtrahantur 23, residuus est 1 grossus 15 addendus, ut residui loco ponantur 16 grossi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION II.

80. Quod si numerus major e minore subtrahi jubeatur, evidens est, id fieri non posse. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur fig-

no—. E gr. Si quis 8 thaleros solvere debet, atque 3 nonnisi possidet: tribus solutis 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.

PROBLEMA V.

81. *Examinare subtractionem.*

RESOLUTIO.

Residuo addatur subtrahendus (§. 73.). Quodsi enim summa fuerit æqualis minuendo: subtractio ritè peracta (§. 43.).

E. gr. 9800403459 Minuendus.

4743865263 Subtrahend.

5056538196 Differentia.

9800403459

PROBLEMA VI.

82. *Examinare additionem per subtractionem.*

RESOLUTIO.

1. Describantur in continua serie multiplica Septenarii centenario inferiora, nempe 7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. continua Septenarii additione invenienda. Est enim $7+7=14$. $14+7=21$ &c.

2. In exemplo ad examinandum proposito, veluti

566

8259

526

2697

3425

10946

sumantur in aggregato binæ notæ finissimæ 10, & cum multiplis septenarii conferantur.

3. Multipulum proxime inferius, aut ipse septenarius, veluti in nostro casu, ab istis notis subtrahatur & residuum 3 iisdem superscribatur.
4. Juncta huic residuo 3 nota proxime sequente 9, numerus inde resultans 39 conferatur ut ante cum septenarii multiplis, & proxime minori 35 inde subducto, residuum 4 supra scribatur.
5. Hæc operatio continuetur, donec residuum ultimum 5 super nota dextima obtineatur.
6. Singulæ aggregandorum series 2687 & 8259 eodem modo tractentur.
7. Residua super notis dextimis 6 & 6 addantur, & a summa 12 septenarius vel ejus multipulum proxime inferius abjiciatur.

Quod si residuum fuerit idem cum residuo super nota dextima aggregati, velut in nostro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO

Ad operationem attento manifestum est tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla septupli, e. gr. in nostro casu millenariorum, centenariorum, decadam, unitatum. Jam cum aggregatum sit aggregandis æquale §. 40., omnia quoque ista multipla junctim sumta

utro-

utrobique æqualia esse debent (§. 64. 65.). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; residua omnino æqualia sint necesse est (§. 69.). Quare si contingat, inæqualia residua fieri; id indicio erit, si examen rite institutum, errorem in operatione admissum fuisse. *Q. e. d.*

PROBLEMA VII.

83. *Abacum Pythagoricum, hoc est, Tabulam construere, in qua facta ex singulis digitis in singulos repræsentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus singula in 9 partes æquales dividantur & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.
2. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur novem notæ numericæ, seu singuli digiti
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur sub 4. Addantur 2 & 6, aggregatum 8 ponatur 6; & ita porro.
4. Quodsi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus Pythagoricus construatur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

S C H O L I O N.

84. *Abacum Pythagoricum memorie mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoria infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut divides.*

P R O B L E M A VIII.

85. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

R E S O L U T I O

1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (§. 73.)
2. Ducatur sub iis linea recta.
3. Infra hanc ex abaco Pythagorico scribantur singula producta ex singulis multiplicandi notis in unicates mul.

multiplicatoris, similiter ex illis in reliquis hujus notas, ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime finiliori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. 73.). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

E. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto,

38476	duc 5 in 6, cumque factum,
35	vi abaci Pythagorici, sit 30,
192380	scribe 0 sub 5 & 3 decades annu-
115428	numera facto ex 5 in 7. quod
1346660	est 35. Additis itaque 3 ad

35, prodeunt 38. Pone 8 juxta 0 versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annuera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente reponne. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quæatur factum ex multiplicando

in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci Pythagorici primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 35.), adeoque multiplicandum ipsum (§. 6.) toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est (§. 40.), adeoque multiplicandum toties continet, quoties singulæ multiplicatoris notæ, hoc est, partes (§. 35.), consequenter totus multiplicator (§. 6.) unitatem continet. Est igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 45.)

Q. e. d.

SCHOLIUM.

86. Si factoribus cyphræ adhereant, producto invento eadem adjunguntur, ut ex sequentibus exemplis manifestum.

$$\begin{array}{r}
 3578 \quad \quad \quad 4760 \\
 30 \quad \quad \quad 2000 \\
 \hline
 107340 \quad \quad 9520000
 \end{array}$$

PRO.

PROBLEMA IX.

87. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si divisor unica fuerit nota,

1. Scribatur is sub nota dividendi finissima, aut, si ea minor fuerit, sub proximo sequente, ac ope *Abaci Pythagorici* investigetur, quoties in nota vel notis superscriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram versus post lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in divisorem & productum ex nota vel notis superscriptis dividendi subtrahatur, & his deletis, si quod fuerit residuum, superscribatur.
3. Divisor ad notam subsequenter versus dexteram promoveatur, & ope *Abaci Pythagorici* denuo investigetur, quoties in notis superscriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodsi hæc operatio per singulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 7856, divisor 3. Ponantur 3 sub 7 & per *abacum Pythagoricum* innotescit, 3, in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 post lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc est 6, subtrahatur ex 7 lineola trans-

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 7856 \end{array} \left(\begin{array}{r} 2618 \\ 3 \\ 3333 \end{array} \right.$$

ver-

versa delendis, residua unitas superscribatur. Promoveatur divisor 3 sub 8, cumque vi *abaci Pythagorici* 3 in 18 sexies contineatur, scribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 subducatur: quo in casu nihil relinquitur. Quodsi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618, & binarius 2 remanet: id quod indicio est numerum propositum in tres partes æquales exacte dividi non posse.

DEMONSTRATIO.

Ex ipsa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties divisor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc est, in singulis ejus partibus (§. 35.), adeoque in toto dividendo (§. 6.) contineatur, consequenter unitatem toties continet, quoties dividendus divisorem. Est igitur quotus (§. 48.)

Q. e d.

Casus II. Si divisor ex notis pluribus constet,

1. Sinistima ejus nota scribatur sub nota sinistima dividendi & reliquæ dexterioribus sub proxime sequentibus versus dexteram.
2. Ope *abaci Pythagorici* investigetur, quoties prima divisoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in divisorem integrum & dispiciatur, utrum
factum

factum ex numeris superscriptis subtrahi possit, nec ne.

4. Si subtractio fieri queat, scribatur is loco quoti post lunulam & subtractio actu peratur. Numeri, ex quibus subtractio fit, lineola transversa deleantur, & qui residui fuerint, superscribantur. Quodsi vero subtractio non succedat, loco quoti sumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in divisorem ad notas dividendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.
5. Divisor loco uno versus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.
6. Hæc operatio continuetur, donec divisor ulterius promoveri nequeat. Sic *f. e. q. p.*

E. gr. Si dividendus 7856, divisor 32. Scribantur 32 sub 78 & inquirentur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in eo contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 subtrahi potest, 2 scribantur post lunulam &, subtractione peracta re-

siduisque 14 superscriptis, divisor loco uno promoveatur. Quo facto investigetur, quoties 3 in 14 contineantur & factum ex 4 in 32, hoc est 128, subducatur ex 145, residuo

$$\begin{array}{r}
 \times 1 \\
 7856 \\
 3222 \quad \left(245 \frac{1}{2} \right. \\
 33
 \end{array}$$

fiduo 17 suprascripto & 4 in loco quoti post lunulam repositis. Promoveatur divisor denuo loco uno & quærat, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in divisorem 32, nempe 160 subtrahatur ex 176, residuo 16 ut ante suprascripto. Dico numerum inventum $245\frac{1}{2}$ esse quotum quæsitum.

Si divisor ex pluribus præsertim constet notis, præstat multipla quoti subtrahenda sub notis dividendi, ex quibus subtractio fieri debet, immediate scribi & sub subtrahendo residuum, cui continuandæ divisionis gratia jungitur nota dividendi sequens, donec nulla superfuerit, adeoque divisio absoluta.

E. gr. Sit dividendus 385797, divisor 8672, quem tibi sub loco quoti notabis. Iam cum 8 in 38 quater contineatur, scribe divisoris 8672 quadruplum sub notis dividendi 38479, & residuum 3891 sub eodem juncta eidem nota sequente 7, ut divisio continuari possit. Quoniam itaque divisor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum divisoris ut ante sub iisdem ponitur & ex ipsis aufertur. Erit $44\frac{1}{2}$ quotus.

$$\begin{array}{r}
 385797 \\
 \underline{34688} \quad 44 \\
 38917 \\
 \underline{34688} \quad 8672 \\
 4229
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Eadem fere est demonstratio, quæ in casu primo, hoc unice notato, quod, cum ex *abaco Pythagorico* constare nequeat, quoties divisor integer in notis dividendi superscriptis contineatur, interea supponatur, toties illum in his contineri, quoties sinistra divisoris nota continetur in sinistra aut duabus sinistimis dividendi notis. Licet enim hæc suppositio subinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox instituitur, cum factum ex divisore in quod juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pseudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

PROBLEMA X.

88. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, si multiplicatio rite fuerit peracta.

$$\begin{array}{r}
 38476 \overline{) 13.466.60} \\
 \underline{11\ 5428} \\
 19\ 2380 \\
 \underline{19\ 2380} \\
 00\ 0000
 \end{array}$$
 (35 E. gr. Si multipli-
 candus 38476, mul-
 tiplicator 35.; factum
 est 1346660 (§. 85.)
 Si vero 1346660 per
 38476 divides, quo-
 tus est 35.

PROBLEMA XI.

89. *Examinare divisionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.
2. Facto addatur, si quod a divisione fuerit residuum.

Quodsi hac ratione prodeat dividendus, divisio legitime peracta. (§. 146.

$$\begin{array}{r}
 245 \\
 32 \\
 \hline
 490 \\
 735 \\
 \hline
 7840 \\
 16 \\
 \hline
 7856
 \end{array}$$
 E. gr. Si 7856 divides per 32,
 quotus est 245, residuum 16. Duc
 245 in 32 & facto 7840 adde
 16; habebis dividendum 7856.
 Constat igitur, divisionem legiti-
 me fuisse peractam.

CAPUT III.

DE

RATIONE AC PROPORTIONE
QUANTITATUM.

DEFINITIO XXXII.

90. *R*atio est ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumpto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis*, & in specie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *Consequens* vero ad quem alter refertur.

SCHOLION I.

91. Euclides rationem definit per habitudinem magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem. Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis est finus recti ad sinum complementi in Trigonometria.

SCHOLION II.

92. Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commensurabilia, sed etiam ad
Welf. Mathes. P. I. D incom-

incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.

COROLLARIUM I.

93. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem sine tertio homogeneo assumpto intelligatur (§ 39.); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

94. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumpta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 62.). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

95. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 17.); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 16.). Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 48.).

DEFINITIO XXXIII.

96. *Ratio majoris inæqualitatis est, quam habet majus ad minus, e. gr. 6 ad 3. Ratio vero minoris inæqualitatis est, quam habet minus ad majus, e. gr. 3 ad 6.*

DEFINITIO XXXIV.

97. *Ratio rationalis* dicitur, quæ est ut unitas vel numerus rationalis ad numerum rationalem, e. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

DEFINITIO XXXV.

98. *Exponentem rationis* dico Quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. E. gr. Rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Donominator*, nec non *Nomen rationis*.

COROLLARIUM I.

99. Si consequens est unitas, antecedens ipse est exponens rationis, e. gr. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM. II.

100. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 48.).

COROLLARIUM. III.

101. Rationes per exponentes discernuntur (§. 95. 98.) atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A: B (§. 50.

DEFINITIO XXXVI.

102. Si terminus minor est pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis

D 2,

tatis

tatis vocatur *multiplex*; ratio vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3. &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$ &c. E. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO XXXVII.

103. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; ratio majoris inæqualitatis dicitur *superparticularis*, ratio minoris inæqualitatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$ &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$ &c. E. gr. 3. ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO XXXVIII.

104. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; ratio majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*; ratio minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superquadripartiens septimas*, si $1\frac{6}{7}$ &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{4}{3}$, *subsupertripartiens* quar-

quartas, si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{17}$ &c. E. gr. 5 ad 3 est ratio *superbipartiens tertias*; sed 3 ad 5 ratio *subsuperbipartiens tertias*.

DEFINITIO XXXIX.

105. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; *ratio majoris inæqualitatis* vocatur *multiplex superparticularis*; *ratio minoris inæqualitatis submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$ &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{7}{4}$ &c. E. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO XL.

106. Denique si terminus major minorem aliquoties continet, ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, *ratio majoris inæqualitatis* dicitur *multiplex superpartiens*; *ratio minoris inæqualitatis submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$ &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{4}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{27}$ &c. E. gr. Ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens

septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbi-
partiens tertias.

SCHOLIION

107. *En genera & species rationum rationalium, quarum quidem nomina apud recentiores varius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, e. gr. pro dupla 2 : 1, pro sesquialtera 3 : 2; non tamen ab eo ignorari possunt, qui scripta Mathematicorum evolvit.*

DEFINITIO XLI.

108. *Rationes eadem sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes divisi-
dant exponentes æquales.*

COROLLARIUM I.

109. *Quoties ergo antecedens unius ratio-
nis suum consequentem, vel quantam conse-
quentis partem continet, toties antecedens al-
terius suum consequentem, vel tantam conse-
quentis partem continet: vel etiam quoties
antecedens unius in consequente suo contine-
tur, toties antecedens alterius continetur in
suo consequente (§. 95.).*

COROLLARIUM II.

110. *Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B
= C : D, seu in exemplo singulari 8 : 4 =
30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum
in posterum designabimus (§. 101.).*

SCHO-

S C H O L I O N

III. *Alii signis aliis utuntur. Communiter A. B. : : C. D. scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristica signa scientifica non scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

C O R O L L A R I U M. III.

II2. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§. 101.), in rationibus autem iisdem sint exponentes iisdem (§. 108.) rationes eadem sunt etiam similes (§. 19.), & contra.

D E F I N I T I O XLII.

II3. Rationum duarum identitas vel similitudo dicitur *Proportio*. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. E. gr. Si $A : B = C : D$, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

D E F I N I T I O XLIII.

II4. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem cum antecedente secundæ; ut si $3 : 6 = 6 : 12$; *Discreta* vero si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si $3 : 6 = 4 : 8$. In proportione continua *terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius propor-*

tionalis appellatur. Ita numerus 6 est medius proportionalis inter 3 & 12.

DEFINITIO XLIV.

115. Rationum diversarum $A : B$ & $F : G$ *major* dicitur $A : B$, si fuerit $A : B > F : G$; contra *minor* $F : G$, si $F : G < A : B$. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. E. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4 nam $6 : 3 (= 2) > 5 : 4 (= 1\frac{1}{4})$; sed 3 ad 6 minorem habet quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO XLV.

116. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8 & 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similium. Ita 48 : 3 seu 16 : 1 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde simul intelligitur, quamnam ratio dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata*. Nempe 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEO.

THEOREMA I.

117. *Rationes A: B & F: G similes eidem tertiæ C: D sunt etiam similes inter se: & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiæ sunt etiam eadem eidem tertiæ (§. 112.). Quare cum sit $A: B = C: D$ & $C: D = F: G$ (§. 110.) ; erit $A: B = F: G$ (§. 65.), consequenter A ad B ut F ad G (§. 110.). *Quod erat unum.*

Porro $A: B = C: D$ & $F: G = H: E$ itemque $C: D = H: E$, per hypoth. Sed $A: B = H: E$, per demonstr. Ergo etiam $A: B = F: G$, per demonstr. *Quod erat alterum.*

THEOREMA II.

118. *Idem C ad æqualia A & B; & æqualia A & B ad idem C, veletiam æqualia C & D eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

$A = B$, per hypoth. Ergo $C: A = C: B$ (§. 50. 72.), consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 110.). *Quod erat primum.*

Similiter quia $A = B$, per hypoth. erit $A: C = B: C$ (§. 50. 72.), consequenter

D 5

A

58 ELEMENTA ARITHMETICÆ

A & B ad C eandem rationem habent (§. 110.). *Quod erat secundum.*

Sit denique $A=C$ & $B=D$, erit $A:B=C:D$ (§. 50. 72.), consequenter ratio utrobique eadem (§. 110.). *Quod erat tertium.*

THEOREMA III.

119. Si fuerit $A:B=C:D$; erit etiam invertendo $B:A=D:C$.

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 48.), consequenter $B:A=1:E$ & $D:C=1:G$ (§. 110.). Sed $A:B=C:D$, per hypoth. seu $E=G$ (§. 12.). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 118.), consequenter $B:A=D:C$ (§. 117.). *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

120. Partes similes P & p eandem rationem habent ad tota T & t: si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO

Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam p ad t; partes
p &

p & P per diversitatem rationis ad tota a se invicem distingui poterunt. Erunt adeo dissimiles (§. 19.): Quod cum sit absurdum, utpote contra hypothesin; erit P ad T ut p ad t Quod erat unum.

Cum $t:p=T:P$, per hypoth. erit $p:t=P:T$ (§. 119.). Ergo per demonstrata P & p sunt partes similes. Quod erat secundum.

Si P & p sunt partes similes totorum T & t , erit $P:T=p:t$ per num. 1. Adeoque $T:P=t:p$ (§. 119.), hoc est, tota ad partes similes eandem rationem habent. Quod erat tertium.

THEOREMA V.

121. Partes similes P & p sunt inter se ut tota T & t .

DEMONSTRATIO.

Cum totum sit idem cum partibus suis simul sumtis (§. 6.); quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet, e. gr. quarta, vigesima, millesima, millionesima aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare si ponamus totum minus t toties sumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipsum sumitur, toties etiam sumenda ejus pars p , donec parti ipsius T simili, quæ est P , æqualis fiat. Toties itaque P continet p , quoties T ipsum t . Sunt ergo

ergo partes similes ut tota (§. 109.).
Q. e. d.

THEOREMA VI.

122. Si $A : B = C : D$; erit etiam alternando seu permutando $A : C = B : D$

DEMONSTRATIO.

- I. Si antecedentes A & C consequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 16.), æque similes (§. 120.) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est, antecedentes A & C eam inter se rationem habent, quam consequentes B & D. (§. 121.).
- II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia $A : B = C : D$, per hypoth. erit $B : A = D : C$ (§. 119.), consequenter $B : D = A : C$ per cas. I. Q. e. d.

COROLLARIUM. I.

123. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum (§. 48.).

COROLLARIUM II.

124. Si fuerit $A : B = C : D$, & $B = D$; erit etiam $A = C$. Est enim $A : C = B : D$ (§. 122.). Sed $B = D$, per hypoth. Ergo $A = C$ (§. 108.).

COROLLARIUM III.

125. Si fuerit $B : A = D : C$ & $B = D$; erit etiam $A = C$. Cum enim sit $A : B = C : D$ (§. 119.); erit etiam $A = C$ (§. 124.).

THEO-

THEOREMA VII.

126. Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem ea itidem æqualia sunt.

DEMONSTRATIO.

A: B=D: B, per hypoth. Ergo A: D=B: B (§. 122.). Sed B=B (§. 60.). Quare A=D (§. 108.). Et idem eodem modo ostenditur, si A: B=D: C & B=C. Quod erat unum.

Similiter C: A=C: B, per hypoth. Ergo C: C=A: B (§. 122.). Sed C=C (§. 60.). Quare A=B (§. 108.). Et idem eodem modo patet, si C: A=D: B & C=D. Quod erat alterum.

THEOREMA VIII.

127. Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E sunt inter se ut A & B.

DEMONSTRATIO.

6	12	Cum fit 1: C=A: D
3	3	& 1: C=B: E (§. 45);
18	36	erit A: D=B: E (§.
6	36	117.), consequenter
		A: B=D: E (§. 122.).
		Q. e. d.

SCHOLIUM.

128. Cum C sit eadem quantitas in utroque casu, per hypoth. unitas quoque in utroque eadem est (§. 10.) consequenter $1 : C$ eadem Ratio.

COROLLARIUM.

129. Ergo si $A > B$, etiam $AC > BC$ (§. 108.), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA IX.

130. Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G sunt inter se ut A & B

DEMONSTRATIO.

24 : 12 Cum sit $1 : C = F : A$ & $1 : C$
 3) ————— = $G : B$ (§. 123); erit $F :$
 8 4 $A = G : B$ (§. 117.), con-
 8 : 4 = 24 : 12 sequenter $F : G = A : B$
 (§. 122.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

131. Si $A > B$ etiam $F > G$ (§. 108.), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA X.

132. Si rationum similium $A : B$ & $C : D$ antecedentes vel consequentes per idem E dividas, in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D ; in posteriore ante.

*antecedentes A & C ad quotos H & K
eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3: 6=12: 24 Quoniam A: B=C: D:
3 3 per hypoth. erit A: C
=B: D (§. 122.). Sed
1: 6=4: 24 A: E=F & C: E=G, per
hypoth. Ergo F: G=A: C (§. 130.), =
B: D (§. 117.), consequenter F: B=
G: D (§. 122.). Quod erat unum.

Similiter quoniam A: B=C: D, per
hypoth. erit A: C=B: D (§. 122.). Sed
B: E=H & D: E=K per hypoth. Ergo
B: D=H: K (§. 130.), consequenter
A: C=H: K (§. 117.) & hinc tandem
A: H=C: K (§. 122.). Quod erat alterum.

THEOREMA XI.

133. Si rationum similium A: B &
C: D antecedentes vel consequentes per ean-
dem quantitatem E multiplices, in casu
priori facta A E & C E ad consequentes
B & D, in posteriore antecedentes A &
C ad facta B E & D E eandem rationem
habent.

DEMONSTRATIO.

2: 6=3: 9 Quia A: B=C: D, per
6 6 hypoth. A: C=B: D (§.
122.). Sed E A: E C=A: C
12: 6=18: 9 (§. 127.). Ergo E A: E C
Ergo

$=B: D$ (§. 117 consequenter $EA: B = EC: D$ (§. 122.). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, esse $A: BE = C: DE$. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XII.

134. Si rationum similium $A: B$ & $C: D$ antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices aut dividas; in casu priore facta, in posteriore quoti eandem inter se rationem habent.

DEMONSTRATIO

$3: 6 = 12: 24$ $A: B = C: D$, per hypoth. Ergo $EA: B = EC: D$ (§. 133.), consequenter $EA: FB = EC: FD$ (§. cit.,). *Quod erat unum.*
 $3: 6 = 12: 24$ Sit $A: E = G$, $B: F = H$, $C: E = K$ & $D: F = L$. Quoniam $A: B = C: D$, per hypoth. $G: B = K: D$ (§. 132.). Ergo & $G: H = K: L$ (§. cit.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIII.

135. Si fuerint quotcunque rationes similes $A: B$, $C: D$, $E: F$, $G: H$ &c. summa omnium antecedentium $A + C + E + G$ &c. est ad summam omnium consequentium $B + D + F + H$ &c. ut ante.

CAP. III. DE RATIO. AC PROPOR. 65

tecedens unius rationis A ad suum consequentem B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. esse $A = \frac{1}{2} B$, $C = \frac{1}{2} D$, $E = \frac{1}{2} F$, $G = \frac{1}{2} H$; erit $A + C + E = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} F + \frac{1}{2} H$ (§. 66), hoc est, summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium, consequenter ut antecedens unius rationis ad suum consequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, si alia quæcunque ratio antecedentium ad consequentes ponatur, vel etiam antecedentes sint consequentibus majores: patet propositum. Q. e. d.

THEOREMA XIV.

136. Si fuerit ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, ita ablatum C ad ablatum D : erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, vel ut ablatum C ad ablatum D .

DEMONSTRATIO.

24: 12 Aut $A: B = C: D$, aut
6: 3 $A: B > C: D$, aut denique
— $A: B < C: D$ (§. 17.).
18: 9 Ponamus $A: B > C: D$. Ergo pars ipsius A , quæ dicatur F , erit ad B ut C ad D hoc est, $F: B = C: D$ (§. 110.), consequenter $F + C: B + D = C: D$ (§. 135.). Quare cum etiam
Wolf. Mathes. P. I. E fit

fit $A + C : B + D = C : D$, *per hypoth.* erit $F + C = A + C$ (§. 126.), adeoque $F = A$ (§. 69.). Sed F est pars ipsius A *per hypoth.* Pars igitur toti æqualis quod cum sit absurdum (§. 63.), ut sit $A : B > C : D$, fieri nequit.

Sit jam $A : B < C : D$. Ergo majus ipso A , quod dicatur G , ad B eandem rationem habet, quam C ad D , hoc est $G : B = C : D$ (§. 110.), consequenter $G + C : B + D = C : D$. (§. 135.). Quare cum etiam sit $A + C : B + D = C : D$, *per hypoth.* erit $G + C = A + C$ (§. 126.), adeoque $G = A$ (§. 69.). Sed A est pars ipsius G *per hypoth.* Ergo pars toti æqualis: quod cum sit absurdum (§. 63.), ut sit $A : B < C : D$ fieri nequit. Quoniam itaque nec $A : B > C : D$ nec $A : B < C : D$ *per demonstrata*: erit utique $A : B = C : D$, consequenter etiam $A : B = A + C : B + D$ (§. 117.). *Q. e. d.*

THEOREMA. XV.

137. In rationibus similibus $A : B$ & $C : D$ differentia antecedentium $A - C$ est ad differentiam consequentium $B - D$, ut antecedens rationis utriuslibet ad suum consequentem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§. 122.). Ponamus $A > C$ & $B > D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§. 6. 16.). Quamobrem
cum

cum sit $A : B = C : D$, per hypoth. erit
 $A : C : B = D : A : B$ vel $= C : D$ (§. 136.).
 Q. e. d.

THEOREMA XVI.

138. Si fuerit ordinate ut antecedens
 primæ rationis A ad suum consequentem
 B , ita antecedens secundæ D ad conse-
 quentem suum E ; & ut consequens pri-
 mæ B ad aliud quidpiam C , ita conse-
 quens secundæ E ad aliud quidpiam F :
 erit ex æquo antecedens primæ A ad C .
 ut antecedens secundæ D ad F .

DEMONSTRATIO.

4: 2=6: 3 Quoniam $A : B = D : E$
 2: 8=3: 12 & $B : C = E : F$, per hypoth.
 4: 8=6: 12 erit $A : D = B : E$ & $B :$
 $E = C : F$ (§. 122.), conse-
 quenter $A : D = C : F$ (§. 117.). Quare
 $A : C = D : F$ (§. 122.), Q. e. d.

COROLLARIUM I.

139. Quodsi fuerit $A : B = C : D$ & $A : F$
 $= C : G$; cum etiam sit $B : A = D : C$. (§.
 119.), erit $B : F = D : G$ (§. 138.).

COROLLARIUM II.

140. Si denique fuerit $A : B = C : D$ & $F : A$
 $= G : C$, cum etiam sit $A : F = C : G$ (§.
 119.) erit $B : F = D : G$ (§. 139.).

THEOREMA XVII.

141. *Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONSTRATIO.

4 2 Sint duo factores A & B,
2 4 erit 1: A=B: AB & 1:B=A:
— BA (§. 48.). Est vero etiam
8=8 1:A=B:BA (§. 122.), adeoque
 ob unitatem eandem, *per hypo-*
th. B: AB=B: BA (§. 117.). Ergo
AB=BA (§. 126.).

COROLLARIUM

142. Sint tres factores A, B & C. Quoniam AB=BA (§. 141.); erit CAB=CBA (§. 71.), adeoque & ABC=BAC (§. 141.). Similiter quia CB=BC (§. 141.); erit ACB=ABC (§. 71.), adeoque & CBA=BCA (§. 141.). Et quia AC=CA (§. 141.), erit BAC=BCA (§. 71.), adeoque ACB=CAB (§. 141.). Quare CAB=CBA=BCA=BAC=ABC=ACB (§. 65.), hoc est, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLIUM

143. *Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores: sed demonstratio proluxior evadit, si plures tribus fuerint termini.*

THEO-

THEOREMA XVIII.

144. Si factum per multiplicandum dividitur, quotus est multiplicans: si per multiplicantem, quotus est multiplicandus.

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. 45.). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illum dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 48.). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§. 126.). Quod erat unum.

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. 45.); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 122.). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. 48.). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 126.). Quod erat alterum.

COROLLARIUM

145. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. 35.).

THEOREMA XIX.

146. Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra, factum est dividendus.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§. 123.). Sed si quotus per divisorem multiplicatur, erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§. 45.). Ergo factum æquale est dividendo (§. 126.). *Quod erat unum.*

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 141.); erit quoque in hoc casu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XX.

147. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales* $A: B=C: D$, *sint totidem alie inter se quoque proportionales* $E: F=G: H$, *si posteriores singulas in singulas priores ducas, facta inter se proportionalia sunt, nempe* $AE: FB=GC: DH$.

DEMONSTRATIO.

Cum sit per hypothesin

$$\begin{array}{ccccccc} A: B=C: D & \& E: F=G: H \\ E & F & E & F & C & D & C & D \end{array}$$

erit $EA: FE=EC: FD$ & $CE: DF=CG: DH$. (§. 134.). Sed $EC=CE$ & $FE=DF$ (§. 141.). Ergo $EA: FB=CG: DH$ (§. 117.) $=GC: HD$ (§. 141.). Q. e. d.

THEO-

THEOREMA XXI.

148. *Rationis compositæ exponens est æqualis facto, quod produciunt exponentes simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ $A : B$ exponens $= m$; secundæ $C : D$ exponens $= n$. Erit $m : 1 = A : B$ & $n : 1 = C : D$ (§. 100.). Ergo $m n : 1 = AC : BD$ (§. 147.), consequenter $m n$ est exponens rationis $AC : BD$ (§. 100.), hoc est, compositæ ex $A : B$ & $C : D$ (§. 116.). Q. e. d.

SCHOLION.

149. *Sint rationes $8 : 4$ & $24 : 6$. Illius exponens est 2; hujus 4. Rationem compositam datarum habent $192 : 24$. Sed $192 : 24 = 8$, quod est factum ex 2 in 4. Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA XXII.

150. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D , &c. prima A ad tertiam C est in ratione duplicata; ad quartam D in ratione triplicata &c. primæ A ad secundam B .*

DEMONSTRATIO.

I. Quoniam $A : B = B : C$, per hypoth. AB ad BC habet rationem duplicatam

E 4 ipfius

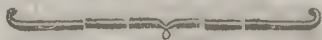
ipſius A ad B (§. 116.). Sed $AB:BC = A:C$ (§. 130.). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipſius A ad B (§. 117.). *Quod erat unum.*

2. Quoniam $A:B=B:C=C:D$; per *hypoth.* ABC eſt ad BCD in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 116.). Sed $ABC:BCD=A:D$ (§. 127.). Ergo etiam A ad D eſt in ratione triplicata ipſius A ad B (§. 117.). *Quod erat ſecundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonſtrari poſſit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad ſextum quintuplicatam &c. primi ad ſecundum. *Quod erat tertium.*

CAPUT IV.

DE

SPECIEBUS ARITHMETICÆ
IN NUMERIS FRACTIS.

THEOREMA XXIII.

151. Si numerator eſt æqualis denominatori, fractio $\frac{1}{1}$ æquivaleret integro; ſi minor, fractio $\frac{1}{2}$ minor eſt integro; ſi major, fractio $\frac{3}{2}$ integro ſeu unitate major eſt.

DE-

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (e. gr. in nostro casu in 4) divisum, & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas (§. 39.). Quodsi ergo numerator denominatori æqualis, *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 64.). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis, consequenter eadem minor (§. 16.). *Quod erat secundum.*

Si denique numerator major est denominatore, *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales sunt (§. 64.). Ergo integrum parti fractionis æquale est, consequenter ipsa integro major (§. 16.). *Quod erat tertium.*

SCHOLIUM.

152. Fractiones integro æquales vel eodem majores dicuntur vulgo spurix, quia proprie loquendo fractiones non sunt nisi quæ integro minores. (§. 27.).

PROBLEMA XII.

153. *Invenire, quot integra fractio, quæ integro major ($\frac{2}{1}$), contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare, quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 48.). Sed denominator idem est cum integro (§. 39.). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

154. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
 2. Factum scribatur loco numeratoris.
- Ita reperiēs $3 = \frac{2}{8}$, $5 = \frac{3}{8}$, $7 = \frac{2}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Est nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 45. 119.). Sed unitas & denomi-

minator datus sunt idem integrum (§. 39.).
Ergo fractio & numerus integer æquales
sunt (§. 126. Q. e. d.

THEOREMA XXIV.

155. *Fractiones homogeneæ æquales
sunt, quarum numeratores ad suos deno-
minatores eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter se sint homoge-
neæ, ex hypoth. ad eandem unitatem
referuntur (§. 25.), adeoque ipsarum de-
nominatores idem totum referunt (§. 39.).
Quare si numeratores ad suos denomina-
tores eandem rationem habent; fractio-
nes æquales sunt (§. 126.). R. e. d.

E. gr. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$.

SCHOLIUM.

156. *Intelligitur adeo identitas fractionum, si
numerator unius toties contineatur in denominatore
suo, quoties numerator alterius in suo continetur.*

COROLLARIUM.

157. *Quodsi ergo tam numerator, quam
denominator alicujus fractionis ($\frac{a}{b}$) per eun-
dem numerum (2) multiplicetur vel dividatur;
in casu priore facta $\frac{2a}{2b}$, in posteriore quoti
($\frac{a}{b}$) constituunt fractionem datæ ($\frac{a}{b}$) æquiva-
lentem (§. 127. 130.).*

PRO-

P R O B L E M A XIV.

158. *Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum.*

R E S O L U T I O.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Divisor primæ divisionis seu numerus datus minor denuo dividatur per residuum primæ divisionis.
3. Similiter divisor secundæ divisionis dividatur per residuum secundæ & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, divisorem ultimum esse communem mensuram maximam numerorum datorum.

E. gr. Sint numeri dati 168 & 240, reperietur eorum communis mensura maxima 24 hunc in modum:

$$\begin{array}{rcl} 72 & 24 & \\ 240 \overline{) 1} & 168 \overline{) 2} & 72 \overline{) 3} \\ 168 & 72 & 24 \end{array}$$

Similiter communis mensura maxima numerorum 95 & 47. reperitur 1.

D E M O N S T R A T I O.

Divisor ultimus 24 metitur divisorem antecedentis (in nostro quidem casu secundæ) divisionis 72, (*per hypoth.* & §. 53.). Ergo & metitur dividendum ante-

ce-

cedentis, hoc est, in nostro casu secundæ divisionis 168, quippe ex dividendo ultimæ divisionis 72, aliquoties (hic quidem bis) sumto & ejus divisore 24 compositum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & residuum primæ divisionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in nostro casu semel) sumto & residuo primæ divisionis 72 compositum. Est itaque communis numerorum datorum mensura (§. 57.).

Esse vero communem mensuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonstratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem esse mensuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat residuum primæ seu divisorem secundæ divisionis 72, adeoque & residuum secundæ divisionis seu divisorem tertiæ, hoc est, in nostro casu inventam communem mensuram 24. Sed numerus is eadem major est *ex hyp.* Ergo communem mensuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24: Quod cum sit absurdum (§. 53.), major communis mensura non datur. Est igitur ea, quam invenimus, maxima. Q. e. d.

PROBLEMA XV.

159. *Fractionem datam ad minores terminos reducere, h. e. invenire fractionem datæ*

datæ ($\frac{20}{48}$) æquivalen lem, sed minoribus numeris expressam.

R E S O L U T I O.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48 per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæsitam $\frac{5}{12}$ (§. 157.).

C O R O L L A R I U M I.

160. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 158.) fractio ad terminos minimos reducitur.

C O R O L L A R I U M II.

161. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ sola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

P R O B L E M A XVI.

162. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales sunt & communi denominatore gaudent.*

R E S O L U T I O.

Casus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

E. gr.

E. gr. $5) \frac{1}{2} \cdot 3) \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

E. gr. $24) \frac{2}{3} \cdot 12) \frac{1}{2} \cdot 18) \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}$

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 71. & §. 141. 142. Quod vero æquivalent primum propositis, manifestum est per §. 157. Constat ergo propositum. Q. e. d.

PROBLEMA XVII.

163. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos denominatores habuerint, reducantur ad eundem (§. 162.).
2. Addantur numeratores (§. 73.) & summæ subscribatur denominator communis.

E. gr. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} (\S. 162.) = 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$
 (§. 153.). $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\S. 162.)$
 $= 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} (\S. 153.) = 1\frac{1}{4} (\S. 159.).$

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores sint nomina unitatum, ex quibus numeratores compon-

nuntur (§. 39.); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 40.); ad eandem denominationem sunt reducendi (§. 25.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

164. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 262.).
2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 78.) & residuo denominator communis subscribatur.

E. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 159.) & $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$ (§. 162.) $= \frac{1}{10}$.

THEOREMA. XXV.

165. *Fraçtio æquatur Numeratori per denominatorem diviso, hoc est, $\frac{3}{4} = 3 : 4$.*

DEMONSTRATIO.

Est enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem seu integrum ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 27. 39.). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem, ita exponens rationis ad unitatem (§. 100.), si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 126.). Æquatur ergo fractio

nu-

CAP. IV. DE SPEC. ARITH. IN FRAC. 81

numeratori per denominatorem diviso (§. 98.). Q. e. d.

PROBLEMA XIX.

166. Fractionem per fractionem multiplicare.

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius, facta constituunt fractionem quaesitam.

E. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (§. 159.).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B} (\frac{2}{3}) = A : B$ (§. 165.) = F &

$\frac{C}{D} (\frac{1}{2}) = C : D$ (§. cit.) = G; erit $B : A = 1 : \frac{3}{2}$: F & D: C = 1 : G (§. 48.). Ergo BD : AC = 1 : FG (§. 147.), hoc est, AC : BD = $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ = FG : 1 (§. 119.) = FG ($\frac{2}{3}$). Q. e. d.

SCHOLION.

167. Vix autem opus est ut annotemus; si fractione per numerum integrum multiplicanda, ducendum esse solum numeratorem in integrum numerum datum E. gr. Factum ex $\frac{2}{3}$ in 2 est $\frac{4}{3}$.

PROBLEMA XX.

168. Fractionem $\frac{2}{3}$ per aliam fractionem $\frac{2}{3}$ dividere.

Wolf. Mathes. P. I. F RE-

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur. E. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$. 2. Divisor inversus ducatur in dividendum (§. 166.): quod prodit $4\frac{2}{3}$ seu $1\frac{1}{3}$ (§. 153.) est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 48.); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 119.). Quod si fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 162.), cum eadem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 165.); erit Numerator fractionis dividendæ ad Numeratorem dividendis ut fractio dividendæ ad fractionem dividendem (§. 130.), consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad Numeratorem dividendis ut quotus ad unitatem (§. 117.). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt & numerator dividendæ per numeratorem dividendis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per fractionem dividendem emergens (§. 126.). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in denominator.

nominatorem primæ ducto (§. 162.). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus juxta (§. 166.) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

169. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater millies &c. continere potest.*

P R O B L E M A XXI.

170. *Integrum 3 per fractionem $\frac{4}{7}$ dividere.*

R E S O L U T I O.

1. Divisor invertatur, ut in problemate præcedente (§. 168.). E. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer 3 datus ducatur in Numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $2\frac{1}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

D E M O N S T R A T I O.

Eadem est cum demonstratione problematis præcedentis (§. 168.).



CAPUT V.

DE

POTENTIIS NUMERORUM,
GENESI PRÆSERTIM AC ANA-
LYSI NUMERORUM QUADRATO-
RUM ET CUBICORUM.



DEFINITIO XLVI.

171. Si numerus quicumque 2 in se ip-
sum ducatur, factum 4 *Numerus qua-*
dratus; ipse autem hujus intuitu *Ra-*
dix quadrata; appellatur.

COROLLARIUM.

172. Cum sit ut unitas ad radicem quadra-
tam, ita radix ad ipsum quadratum (§. 45.
171.); erit radix media proportionalis inter
unitatem & quadratum (§. 114.)

DEFINITIO XLVII.

173. Si numerus quadratus 4 porro
per radicem 2 multiplicetur; factum 8
dicitur *Numerus Cubicus* seu *Cubus*, &
radix 2 ejus intuitu *Radix cubica*.

COROLLARIUM.

174. Cum sit ut unitas ad radicem, ita ra-
dix ad quadratum (§. 45. 171.) & ut unitas
ad radicem, ita quadratum ad cubum (§. 45.

173.);

173.); erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum (§. 117.), hoc est, unitas, radix, quadratum & cubus in continua proportionem progrediuntur (§. 114.) & radix cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter unitatem & cubum.

DEFINITIO XLVIII.

175. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali *potestatum, potentiarum, dignitatum* nomine appellari solent.

DEFINITIO XLIX.

176. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati est 2, cubi 3 (§. 171. 173.).

DEFINITIO L.

177. Hodie tantum non omnes dignitates optime distinguunt per exponentes, ita ut radix dicatur *dignitas prima*, quadratum *secunda*, cubus *tertia* &c.

HYPOTHESIS XII.

178. Si a fuerit radix, erunt potentiae ipsam sequentes a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 , &c. vel, si $a=2$, $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$, &c. ita ut sit $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$ &c. nempe superius a dextris jungitur exponens.

DEFINITIO LI.

179. *Quantitatem ad dignitatem de-
sideratam evehere idem est ac invenire
factum ex ipsa aliquoties in se ducta
emergens. E. gr. 2 evehere ad digni-
tatem tertiam idem est ac invenire
factum 8, cujus factores 2. 2. 2.*

DEFINITIO LII.

180. *Ex dignitate data radicem ex-
trahere, vel latus educere idem est ac
invenire numerum 2, qui aliquoties in
se ipsum ductus datam potentiam (e.
gr. tertiam) 8 producit.*

SCHOLION.

181. *Cum dignitates superiores nonnisi in Ana-
lysi usum habeant; in præsentî genesin & analysin
quadratorum & cuborum tantum tradimus. Radices
vero quadratas ac cubicas extrahiturus omnium digito-
rum numeros quadratos & cubicos nosse debet, quos
sequens tabula exhibet:*

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubici	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO LIII.

182. *Radix tam quadrata, quam cu-
bica, aut dignitatis superioris cujuscun-
que dicitur binomia, si ex duabus; tri-
no.*

nomia, si ex tribus; *multinomia*, five *polynomia*, si ex pluribus, quam duabus partibus constat.

THEOREMA XXVI.

183. Numerus quadratus radicis binomiæ componitur ex quadrato partis primæ, ex facto dupli primæ in alteram & ex quadrato partis alterius.

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus quadratus, si radix in seipsam ducitur (§. 171.) Utraque vero pars radicis sigillatim ducitur in utramque simul (§. 85.) Quare productum componi debet 1. ex facto partis primæ in seipsam, hoc est, ex quadrato partis primæ (§. 171.), 2. ex facto partis primæ in secundam & ex facto secundæ in primam, hoc est, ex duplo facto primæ in secundam, seu, ex facto dupli primæ in secundam (§. 141. 142.), 3. ex facto partis secundæ in seipsam, hoc est, ex quadrato partis secundæ (§. 171.)
Q. e. d.

SCHOLIUM I.

184. Demonstratio ocularis, si in quocunque exemplo singulari multiplicatio non actu peragitur, sed saltem indicatur: quo in casu exempli universalis vices tuetur, id nimirum non infelicius quam figuræ in Geometria representans, quod singularia in uni.

88 ELEMENTA ARITHMETICÆ

versum omnia commune habent. E. gr. Sit radix binomia 34 aut

$$30 + 4; \text{ erit}$$

$$30 + 4 \text{ Radix binomia}$$

$$30 + 4$$

16 Quadratum partis II.

120 } Facta ex I in II.

120 }

900 Quadratum partis I.

1156 Quadratum totius.

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonstrationibus concipiendis, quam in propositionibus invenien-

COROLLARIUM I.

185. Cum pars dextra sive secunda inter unitates, sinistra sive prima inter decades locum obtineat (§. 35.); quadratum illius in loco dextimo, factum ex unius duplo in alterum in secundo, quadratum denique primæ in tertio a dextimo terminari debet (§. 34.).

SCHOLIUM II.

186. Scilicet quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo facto ex parte una in alteram cyphra una, quadrato autem partis sinistræ due adjunguntur, ut numeri solitarie possint justum locum nanciscantur (§. 34.).

CORO.

COROLLARIUM II.

187. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures finitimæ habeantur pro una, & ex templo patebit, quadratum numeri cujuscunque componi ex quadratis singularum partium & factis ex duplo partis cujuslibet in omnes ipsa finisteriores: ut adeo theorema unum compositioni omnium numerorum quadratorum sufficiat.

SCHOLIUM III.

188. Sit radix 346: sumatur 340 pro parte una & 6 pro altera: erit (§. 183.)

$$340 + 6$$

$$340 + 6$$

36 Quadratum partis III.

2040] Facta ex parte III. in I & II

2040] simul

1600 Quadratum partis II.

12000] Facta ex parte I in II.

12000]

90000 Quadratum partis I.

119716 Quadratum totius.

COROLLARIUM III.

189. Quonam in loco singula producta terminentur, ex corollario primo & ejus scholio intelligitur (135. 186.). Habenda nimirum est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur, ut justum nanciscantur locum (§. 34.).

F 5

PRO-

PROBLEMA XXII.

190. *Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus propositus distinguatur in classes, binas notas classi unicuique assignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes radices, quot classes habentur (§. 187. 189.). Notandum vero, quod classi finissima interdum nonnisi nota unica relinquatur.
2. Jam cum in classe finissima reperitur quadratum notæ finissimæ radices (§. cit.); in Tabula radicum (§. 181.) quæratnr numerus quadratus ei, qui classem finissimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipso subtrahatur; radix vero ejus post lunulam scribatur.
3. Quoti inventi duplum ponatur sub nota finissima classis subsequenter & inde porro sinistrorsum, si ex notis pluribus constiterit. Investigetur novus quotus *per abacum Pythagoricum* (§. 83.), inventusque post lunulam scribatur: est enim pars secunda radices (§. 183. 144.).
4. Idem quotus ponatur sub nota dextima illius classis & factum ex numero
sub-

CAP. V. DE POTENTIIS NUM. &c. 91

subscripto integro indivisorem (§. 185.)
subducatur, ut in divisione moris
est.

5. Quodsi operatio juxta regulam ter-
tiam & quartam in reliquis classibus
iteretur; prodibit radix quaesita (§. 187.
189.).

Er.	11	56	34	11	97	16	(346
	9	::	9	9	::	::)
	2	56	2	97	::	::)
		64		64	::	::)
	2	56	2	56	::	::)
		0		41	16)
				6	86)
				41	16)
					0)

PROBLEMA XXIII.

191. Radicem quadratam ex fractio-
ne data extrahere, cujus numerator &
denominator est numerus quadratus.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum
multiplicans unus numeratorem in nu-
meratorem alterius & denominatorem pa-
riter in denominatorem alterius ducit (§.
166.), quadratum autem ex ductu ejusdem
numeri in seipsum enascitur (§. 171.);

radicem quadratam extracturus eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita radix quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, ex $\frac{16}{81}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM I.

192. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 154.); si numerus datus, qui quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est quadratus & ex fractione extrahatur radix (§. 191.): quæ prodit, fractio radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris quadrati radix indicat.

SCHOLIUM I.

193. E. gr. Si ex 2 extrahenda radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio $\frac{72}{36}$, cujus radix $\frac{6}{6}$ sive 1 $\frac{2}{3}$ exhibet radicem a vera magnitudine parie sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam $\frac{1}{6}$.

COROLLARIUM II.

194. Quoniam numerum per articulum primum, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus eidem non nisi cyphas 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adungere teneris (§. 86.); radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans numero qui

qui quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphas
junge dextrorsum & operationem continua:
ita enim prodibit radix prope vera in parti-
bus decimis, centesimis, millesimis &c.

S C H O L I O N II.

195. E. gr. Sit extrahenda radix quadrata ex
345: prodibit $18\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 45} \left(18\frac{1}{2} \right. \\
 \underline{2 \overline{) 45}} \\
 (28) \\
 224 \overline{) 00} \\
 \underline{224} \\
 00 \\
 (3 \ 68) \\
 18 \ 25 \\
 \underline{2 \ 7.5 \overline{) 0.0}} \\
 (37 \overline{) 07}) \\
 \underline{259 \ 49} \\
 15 \ 51
 \end{array}$$

T H E O R E M A XXVII.

196. Numerus cubicus radice binomice
componitur ex numeris cubicis duarum
partium, ex facto tripli quadrati partis
primæ in secundam & ex facto tripli
quadrati partis secundæ in primam.

DEMONSTRATIO.

Numerus cubicus prodit, si quadratum per radicem multiplicetur (§. 173.). Sed quadratum radice binomiæ componitur ex quadratis partium & facto duplo ex parte una in alteram (§. 183.). Quare cubus componitur ex cubo partis primæ, ex triplo facto quadrati partis primæ in secundam, ex triplo facto quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam, & facto tripli quadrati partis secundæ in primam (§. 141.) atque ex cubo partis secundæ (§. 171. 173.).
Q. e. d.

SCHOLIUM I.

197. Demonstrationem oculavem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit e. gr. radix 34 seu $30+4$, erit

30+4 Radix

16 Quadrat. part II.

120 } Facta ex I in II.

120 }

900 Quadrat. part. I.

64 Cubus part. II.

480 } Facta ex quadrat. II in I.

480 }

3600 Factum ex quadrat. I in II.

480 Factum ex quadrat. II in I.

3600

$\begin{array}{l} * \\ * \end{array} \begin{array}{l} 3600 \\ 3600 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3600 \\ 3600 \end{array}} \right\} \text{Facta ex quadrat. I in II.}$

$\begin{array}{l} * \\ * \end{array} \begin{array}{l} 27000 \\ 27000 \end{array} \text{Cubus part. I.}$

39304. Cubus totius.

COROLLARIUM I.

198. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 35.); numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato ejus in sinistram in secundo, factum ex triplo quadrato sinistræ in dexteram in tertio, cubus denique partis sinistræ in quarto loco terminatur (§. 34.)

COROLLARIUM II.

199. Si radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ finitimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod cubus quicunque componatur ex cubis singularum partium radices, & ex factis tripli quadrati quarumlibet sinisteriorum in proxime dexteriores, itemque ex factis tripli quadrati cujuslibet dexteriores in omnes sinisteriores.

SCHOLIUM II.

200. Sit radix 346. Sume 340 pro parte una radices, erit 6 pars altera, consequenter (§. 196.).

346
346

90000 *Quadrat. part. I.*

12000 } *Facta ex I in II.*

12000 }

1600 *Quadrat. part. II.*

115600 *Quadrat. I & II simul*

2040 } *Facta ex III in I & II simul.*

2040 }

36 *Quadrat. part. III.*

27000000 *Cubus part I.*

3600000 } *Facta ex quadr. I in II.*

3600000 }

480000 *Fact. ex quadr. II in I.*

3600000 *Fact. ex quadr. I in II.*

480000 } *Fact. ex quadr. II in I.*

480000 }

64000 *Cubus part. II.*

693600 } *Facta ex quadr. I & II simul*

693600 } *in III.*

12240 *F. ex quad. III in I & II sim.*

693600 *F. ex quad. I & II sim. in III.*

12240 } *Fact. ex quadr. III in I & II simul.*

12240 }

216 *Cubus part. III.*

41421736 *Cubus totius*

Notandum scilicet, sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse, cumque theorema generaliter de radice utcumque in duas partes divisa loquatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari posse. E. gr. Numerus 346 non modo stante theoremate in 340

&

6, vel in 300 & 46, verum etiam in 195 & 151, in 89 & 257, & in duas quascunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris quadratis, immo in genere in potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur.

COROLLARIUM III.

201. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex corollario primo (§. 198.) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. *Vid. exemplum schol. præc. (§. 200.).*

PROBLEMA XIV.

202. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

- i. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur, quot classes emergunt (§. 198. 201.). Notandum vero, non repugnare, ut classi finissimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In Tabula radicum (§. 181.) quærat^r numerus cubicus eo proxime minor numero, qui in classe finissima continetur, nisi ipse in eadem inveniat^r, atque ab hoc subtrahatur; *Wolf. Mathes. P. I. G ejus*

ejus vero radix post lunulam scribatur: est enim pars prima radices (§. 198.).

3. Quoti inventi quadratum triplum (§. 198. 201.) scribatur sub nota finissima classis subsequētis & inde porro finiflorum, si ex pluribus notis confiterit: quo facto quærat^{ur} quotus, qui erit pars secunda radices (§. cit. & §. 144.).
4. Divisor ducatur in novum quotum & productum sub eo delet^o scribatur, sub nota vero media classis ejusdem terminetur factum ex triplo quadrato novi quoti in præcedentem; sub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri cubici superscriptis subtrahantur (§. cit.).
5. Quodsi operatio per reliquas classes juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit radix quæsit^a (§. 199.).

E. gr.	47	437	928	362
	27			
	20	437		
	Divisor (27)::			
	Fact. ex D. in Q. 16 2 ::			
	Fac. ex 3 □ N. Q. in pr. 324 :			
	Cubus N. Q. 2 16			
	Summa factor. 10656			

	788	928
	Divisor (888) 8 ::	
	Fact. ex Div. in Q. N. 777 6 ::	
	Fac. ex 3 □ N. Q. in pr. : 4 32 :	
	Cubus N. Q. : : : : 8	
	Summa factorum 788 928	

000 000

PROBLEMA XXV.

203. *Radicem cubicam ex fractione extrahere; cujus numerator & denominator cubus est.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Eodem, quo supra (§. 191.), modo patet, radicem figillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{2}{3} \frac{7}{4}$ est $\frac{3}{7}$, ex $\frac{6}{7} \frac{4}{2}$, vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM I.

204. Hinc porro eodem, quo supra (§. 192.), modo consequitur, radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui cubus non est, per hujus denominatoris cubum multiplicetur & radici cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subjiciatur.

G 2

SCHÖ-

SCHOLIION I.

205. E. gr. Si ex 12 extrahenda radix cubica prope vera, defectu minore quam $\frac{1}{8}$; ducatur 12 in 512 cubum ipsius 8 & ex facto 6144 extrahatur radix cubica 18, erit $\frac{18}{8}$ s. $2\frac{3}{4}$ radix prope vera, cujus defectus est minor quam $\frac{1}{8}$.

COROLLARIUM II.

206. Immo inde ulterius eodem, quo supra (§. 194.), modo fuit, radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur & operatio (§. 202.) continuetur.

SCHOLIION II.

207. E. gr. Sit extrahenda radix cubica ex 3; eam reperiēs $1\frac{4}{8}$.

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 1 \overline{) 1.44} \\
 \hline
 2 \overline{) 0.00} \\
 3 \\
 1 2 \\
 48 \\
 64 \\
 \hline
 1 744 \\
 256 \overline{) 0.00} \\
 88 8 \\
 235 2 \\
 672 \\
 64 \\
 \hline
 241 984 \\
 \hline
 14 016
 \end{array}$$

PRO:

PROBLEMA XXVI.

208. *Examinare extractionem radici
quadratæ ac cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix quadrata inventa ducatur in se ipsam & facto residuum, si quod fuerit addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo radix extracta; erit numerus inventus radix quadrata dati vel extracta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 171.)

18.57	E. gr. Radicem quadratam
18. 57	prope veram ex 345 supra (§.
-----	195.) reperimus $18\frac{1}{2}$. Duc
12999	radicem 18. 57 in seipsam &
9285	facto 3448449 adde residuum
14856	1551: prodibit numerus 345;
1857	ex quo extractio fieri debebat,
-----	quatuor cyphris auctus: ut in
3448449	extractione ad inveniendas cen-
1551	tesimas factum fuerat.

3450000

II. Radix cubica inventa ducatur in se ipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 173.).

I. 44 E. gr. Superius (§. 207.) ex
 I. 44 3 extracta radix est $1\frac{4}{6}$. Duc

 5 76 hanc radicem I. 44 in seipsam
 576 & factum 20736 denuo in I. 44.
 144 Producto alteri 2985984 adde,

 20736 quod supra residuum erat, 14016.
 144 Aggregatum est numerus 3 sex

 829 44 cyphris auctus, ut in operatio-
 829 44 ne factum fuerat.
 20736

 2985 984
 140 16

 30000 00

HYPOTHESIS XIII.

209. Interdum utile est, extractionem
 radice tantum indicari, præsertim si per-
 fecta haberi nequit. Est autem signum
 radicale sequens $\sqrt{}$: cui in vertice jungitur
 exponens, dignitatis, si altioris gradus,
 quam quadrata. E. gr. $\sqrt{2}$ denotat ra-
 dicem ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat radicem cubi-
 cam ex 5.



07.) ex
s. Duc
seipsam
n I. 44.
adde,
14016.
3 sex
peratio-

CAPUT VI.

DE

REGULIS PROPORTIONUM.

THEOREMA XXVIII.

210. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur factio mediarum.*

DEMONSTRATIO.

$6:3=8:4$ $A:B=C:D$ (per hypo-
 $\frac{4}{24} = \frac{3}{24}$ $th. \& \S. 110.)$. Ergo $AD:$
 $BC=CD:DC$ (§. 134.). Sed
 $CD=DC$ (§. 141.). Igitur
 $AD=BC$ (§. 108.). Q. e. d.

THEOREMA XXIX.

211. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.*

DEMONSTRATIO.

$6:12=12:24$ Quoniam enim $A:B=$
 $\frac{12}{144} = \frac{6}{144}$ $B:C$ (per hypoth. & §.
 $114. 110.)$; erit $AC=$
 BB (§. 210.). Sed BB est
 quadratum ipsius B (§. 171.). Ergo fa-
 ctum extremarum AC æquatur quadrato
 mediæ. Q. e. d.

ionem
si per-
ignum
ngitur
adus,
at ra-
cubi-

THEOREMA XXX.

212. Si quantitas AD producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D fuerit æqualis alteri BC ex duabus aliis B & C eodem modo productæ; erit $A:B=C:D$.

DEMONSTRATIO.

6	8	
4	3	
24=24	12	
4:8=3:6		

$AC:AD=C:D$ (§. 127. Sed $AD=BC$, per hypoth. Ergo $AC:BC=C:D$ (§. 118.), consequenter $A:B=C:D$ (§. 130.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

213. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale facto ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA XXVII.

214. Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72. multiplicetur per alterum 8 (§. 85.).
2. Ex facto 576 extrahatur radix quadrata 24 (§. 190.): quæ erit numerus quæsitus (§. 211.).

PRO-

PROBLEMA XXVIII.

215. *Datis tribus numeris 3, 12, 5 quartum; aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5, aut in altero casu secundus in seipsum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 est quartus, in altero casu tertius quaesitus.

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum secundum per tertium, aut in altero casu secundum per seipsum multiplicas; factum ex primo in quartum, in casu altero ex primo in tertium prodit (§. 210. 211.). Quodsi ergo hoc per primum dividis; quotus est terminus quartus, in casu altero tertius (§. 144.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

216. Data quælibet fractio converti potest in aliam æqualem datæ denominationis. Quodsi enim *per probl. præf.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem desideratæ quæratu numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæ-

G 5 sitæ,

fitæ (§. 155). E. gr. fit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda
 $3-2-24$. in aliam, cujus denominator
 $2 \cdot 24$, reperietur ea $\frac{1}{2} \frac{6}{4}$.

$$\begin{array}{r} x \\ 48 \overline{) 33} \end{array} \begin{array}{l} 48 \\ 16 \end{array}$$

COROLLARIUM II.

217. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. E. gr. Cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM III.

218. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{428571}{1000000}$ fere.

SCHOLIUM I.

219. In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Hujus vero loco punctum (.) numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut e. gr. duæ cyphræ præponantur, si fractio a millesimis incipiat. Ita loco $\frac{2}{1000}$ scribimus 0.23; loco $5 \frac{2}{1000}$ scribimus 5.0047. Est vero harum fractionum non exiguus in Mathesi usus, quas primus in condendis Tabulis sinuum adhibuit Johannes Regiomontanus.

SCHO-

SCHOLION II.

220. Resolutio hujus problematis vulgo Regula trium appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc Regula aurea vocatur. Facile autem apparet, hac regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum davorum proportionem consideret.

SCHOLION III.

221. Quae in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium solvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatae mercis, per regulam trium invenitur pretium quantitatis ejusdem alterius datae, aut quantitatis mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. E. gr. Pretium 3 librarum sunt 4 thaleri, quantum est pretium 17 librarum? Cum sit ut 3 librae ad 17 libras, ita illarum pretium (quod est 4 thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:

$$3L. - 17L. - 4Th.$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 68 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 68 \end{array} \left(22\frac{2}{3} th. \right)$$

Item: 3 librae veneunt 4 thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ thaleris? Cum sint ut 4 thaleri ad $22\frac{2}{3}$, ita 3 librae ad quasitas; harum numerus ita innotescit:

4Th.

$$4 \text{ Th.} - 22\frac{1}{2} \text{ Th.} - 3 \text{ L.}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ \hline 68 \quad 68 \quad 17 \text{ L.} \\ 44 \end{array}$$

Hinc simul patet, quomodo regula trium examinetur, hoc est, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

S C H O L I O N IV.

222. Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quo labore defunguntur, etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, si aequalibus articulis aequalia pensa absolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, si pensa aequalia singuli absolvunt. E. gr. Intra 2 horas 6 libri folia perleguntur: Quanto horarum spatio 360 perlegi poterunt?

$$6 \text{ F.} - 360 \text{ F.} - 2 \text{ H.}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad x \\ \hline 720 \quad 720 \quad 120 \text{ H.} \\ 666 \end{array}$$

S C H O L I O N V.

223. Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipsis respondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in grossos, grossi in nummos, librae in semiuncias, koræ in minuta &c. convertuntur. E. gr. 3 librae & 4 semiunciae veniunt 2 thaleris & 4 grossis, quanti librae 2? Calculus talis est:

Cap. VI. DE REGULIS PROPOR. 109

3. L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4. gr.

32 32 24

100 S. — 64 — 52 gr.

52

128

320 3328 $\left(33\frac{2}{3} \text{ seu } \frac{100}{3} \text{ gr.} \right)$
~~1000~~

3328

Quod si nosse cupias, quot nummis conveniunt $\frac{2}{3}$ grossi, ita reperiēs (§. 217.).

25 — 7 — — 12

7 29

84 253

$\left(3\frac{2}{3} \text{ num.} \right)$

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{2}{3}$ unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit, ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.

SCHOLIUM VI.

224. In scriptis Arithmeticonum Regula trium inversa occurrit, qua terminus datorum primus duci iubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in Regula trium directa usi sumus (§. 215. 220.), quia scilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est, si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. E. gr. 125 milites operi exstruendo 6 menses impendant: quantus requiritur militum numerus: ut intra 2 absolvatur? Evidens est, quod sit.

110. ELEMENTA ARITHMETICÆ

fit, ut spatium 2 mensum ad spatium 6 mensum, ita numerus militum, qui opus intra sex menses absolvent, ad numerum militum, qui intra duos idem exstruunt. Quo minore enim temporis intervallo exstruitur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:

$$2 \text{ M.} - 6 \text{ M.} = 125 \text{ Mil.}$$

6

XX

750

$$\begin{array}{r} 750 \\ 222 \end{array} \left(375 \text{ Mil.} \right)$$

S C H O L I O N VII.

225. Interdum gemina regula trium applicatione opus est, antequam numerus quaesitus innotescat. Ea vulgo pro peculiari regula venditatur & ab aliis Regula de quinque, ab aliis Regula Composita appellatur, E. gr. 300 thaleri dant intra 2 annos usuram 36 thalerorum, quantam dabunt 20000 thaleri intra 12 annos? Hic per regulam trium primum invenitur, quanta sit usura a 20000 expectanda intra 2 annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra 12 annos existat:

Cap. VI. DE REGULIS PROPORT. III

$$\begin{array}{r}
 300 \text{ Th.} - 20000 \text{ Th.} - 36 \text{ Us.} \\
 \hline
 36 \\
 \hline
 720000 \quad \begin{array}{l} \text{I} \\ 720000 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2400 \text{ Us.} \\ 333300 \end{array} \\
 \hline
 2 \text{ A.} - 12 \text{ A.} - 2400 \text{ Us.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 28800 \quad \begin{array}{l} \text{I} \\ 28800 \end{array} \quad \begin{array}{l} 14400 \text{ Us.} \\ 4800 \end{array} \\
 \hline
 222 \quad \begin{array}{l} 24 \\ 28800 \end{array}
 \end{array}$$

SCHOLIION VIII.

226. *Exemplis istiusmodi^a regula trium semel applicata satis acere potest. Cum enim in nostro casu bis 300 thaleri eandem dent usuram intra I annum, quam 300 intra 2, & duodecies 20000 tantam intra I annum, quantam 20000 intra 12; omiſſis temporis circumſtantiis ita inferatur: bis 300, id est 600 thaleri dant usuram (intra annum scilicet) 36, quantam dabunt duodecies 20000, id est 240000 thaleri (itidem intra annum?*

$$\begin{array}{r}
 600 \text{ Th.} - 240000 \text{ Th.} - 36 \text{ us.} \\
 \hline
 36 \\
 \hline
 1440000 \quad 22 \\
 72 \quad \begin{array}{l} 8640000 \\ 866600 \end{array} \quad \begin{array}{l} 14400 \\ 866600 \end{array} \\
 \hline
 8640000
 \end{array}$$

Posterior hac methodus priori praefertur, quod in illa ad fractionum tedia saepe prolabimur.

SCHO.

SCHOLIUM IX.

227. Dantur & alii casus, in quibus iteratæ regule trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur, quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. E. gr. Lucrum commune trium personarum est 2000 thalerorum, collatum primi 1000, secundi 500, tertii 300: inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. *Ex typum calculi:*

Collatum primi	1000 Th.
secundi	500
tertii	300

Summa Collatorum 1800 Th.

1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 1800 \text{ Th.} - 1000 \text{ Th.} - 2000 \text{ Th.} \\ \hline 2000 \end{array}$$

XXX

XXXXX

2000000 (IIII) Lucrum primi.

2888800

XXX

1800. Th. — 500 Th. — 2000 Th.

$$\begin{array}{r} 2000 \\ 1800 \text{ Th.} - 500 \text{ Th.} - 2000 \text{ Th.} \\ \hline 1000000 \end{array}$$

XXI

Cap. VI. DE REGULIS PROPORT. 113

XXI

888

8880000 (555 $\frac{1}{2}$ Lucrum secundi.

88800

XX

1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.

2 000

600000

88

8886

8880000 (333 $\frac{1}{2}$ Lucrum tertii.

88800

XX

EXAMEN.

1111 $\frac{1}{2}$ Lucrum primi

555 $\frac{1}{2}$ secundi

333 $\frac{1}{2}$ tertii

2000 Th. Lucrum commune.

SCHOLIUM X.

228. Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum in Medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit sponderis dati. E. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est 4, alterius 5, tertii 2 unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit 8 librarum. En calculi typum:

Wolf. Mathes.

H

Pon-

114 ELEMENTA ARITHMETICÆ

Pondus {primi } 4 Unc.
 {secundi } simplicis 5
 {tertil. } 2

Summa 11 Unc.

11 Unc.—8 L.—4 Unc.

16	
128	
4	
512	$\begin{array}{l} \text{X} \\ \text{XXI} \\ \text{XXX} \end{array} \left(\begin{array}{l} 46\frac{1}{2} \text{ pond.} \\ \text{simp. primi} \end{array} \right)$

11 Unc.—128 Unc.—5 Unc.

5	$\begin{array}{l} \text{X} \\ \text{XXII} \\ \text{XXX} \end{array} \left(\begin{array}{l} 58\frac{1}{2} \text{ Pond. simp.} \\ \text{secund.} \end{array} \right)$
640	

11 Unc.—128 Unc.—2 Unc.

2	$\begin{array}{l} \text{XXIII} \\ \text{XXX} \end{array} \left(\begin{array}{l} 23\frac{1}{2} \text{ Pond. simp.} \\ \text{tertil.} \end{array} \right)$
256	

EXAMEN.

Pondus simplicis primi 46 $\frac{1}{2}$ Unc.
 secundi 58 $\frac{1}{2}$
 tertij 23 $\frac{1}{2}$

Pondus mixti 128 Unc.=8 lib.

SCHO-

SCHOLIUM XI.

229. Subinde compendiis locus datur, quæ Practicæ Italicæ nomen ferunt. Ex iis utilissima commemoramus. Nimirum quoniam per regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis (§. 215.), primus & secundus (§. 130.) vel etiam primus & tertius (§. 132.) per eundem si fieri potest, numerum exacte dividantur & quoti in ipsorum loca surrogentur: seu ex subsequente apparet exemplo.

Pretium 3. Lib. est 9 Thal. quantum 7 libr.

3) 1 3 3

Fac. 21. Thal.

Pretium 14. Lib. est 26 Thal. quant. 7. libr.

7) 2 2) — 1

Fac. 13 Thal.

SCHOLIUM XII.

230. Si numerus primus vel tertius fuerit 1 & alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, absque reductione in schol. 5 (§. 223.) præscripta calculus initur, ut sequens exemplum docet.

Pret. 1 Lib. est 3 th. 8 gr. 6 num. quant. 5. L.

5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifestum scilicet est, bis 6 minimos conficere grossum unum; adeoque quinques 6 grossos 2, & numeros 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur; prodibit pretium quæsitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLIION XIII.

231. Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. E. gr. Pretium 5 librarum est 30 thalerorum, quantum erit 4 librarum? R. Quoniam pretium 4 librarum una parte quinta deficere debet a pretio 5 librarum; pretium datum 30 dividatur per 5 & quotus 6 ab eodem subtrahatur, relinquitur quæsitum 24. Item: pretium 8 librarum est 24. thalerorum, quantum erit librarum 9? R. Quia pretium 9 librarum una parte octava excedit pretium 8 librarum, pretium datum 24 dividatur per 8 & quotus 3 eidem addatur, summa 27 erit quæsitum.

SCHOLIION XIV.

232. Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur. E. gr.

Pret. 100. libr. est 30 th. 4 gr. quant. 50 lib.

50) 2. 2) ————— I

Fac. 15 th. 2 gr.

It Pret. 60 libr. est 80 th. quant. 2520 lib.

60) I	6	42
	480	6
	7	7

Fac. 3360 thal.

CAPUT VII.

DE

QUANTITATIBUS ÆQUIDIF-
FERENTIBUS.

DEFINITIO LIV.

233. Si in serie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ secundæ ac tertiæ; eas continue æquidifferentes voco. Si vero in serie quatuor eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ tertiæ ac quartæ, discretim æquidifferentes appello. Ita 3, 6, 7 & 10 sunt numeri discretim æquidifferentes: 3, 6 & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

234. Dicuntur hæ quantitates vulgo Arithmetice proportionales; & vere proportionales, de quibus ante, Geometrice proportionales, appellari solent, ut ab iis distinguantur:

COROLLARIUM I.

235. Si termini semper crescunt, in continue æquidifferentibus terminus secundus est aggregatum ex primo & differentia; tertius summa ex secundo & differentia: Si decre-

H 3

cunt,

118 ELEMENTA ARITHMETICÆ

cunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; secundus aggregatum ex tertio & differentia (§. 81.)

COROLLARIUM II.

236. Similiter in discretim æquidifferentibus si termini crescunt, secundus est aggregatum ex primo & differentia quartus ex tertio & differentia; Si vero decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia, tertius ex quarto & differentia (§. 81.).

THEOREMA XXXI.

237. Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes, summa primæ & tertiæ est mediæ dupla.

DEMONSTRATIO.

4.	7.	10	Si enim termini cres-
7	4.		cunt; secundus componi-
<hr/>			tur ex primo & differen-
14=14			tia, tertius ex secundo

& differentia (§. 235.), adeoque ex primo & differentia dupla. Quare si tertio addatur primus; summa primi & tertii constabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo secundi dupla. Q. e. d.

Eodem modo demonstratio procedit, si termini decrescunt.

SCHOLION.

238. Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi;

$$II = I + D$$

$$III = II + D$$

$$\text{Ergo } III = I + 2D$$

$$\text{Hinc } III + I = 2I + 2D \\ = 2II.$$

THEOREMA XXXII.

239. Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes, summa primæ & quartæ æqualis est summæ secundæ & tertiæ.

DEMONSTRATIO.

$$3 - 5 = 8 - 10$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 3 \\ \hline 13 = 13 \end{array}$$

Si termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia (§. 236.). Quare si primus

quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia constat: Si vero secundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter se æqualia (§. 66.). Q. e. d.

Eodem modo demonstratio procedit, si consequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLIUM I.

240. Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:

$$II = I + D$$

$$III = III$$

$$IV = III + D$$

$$I = I$$

$$II + III = III + I + D \quad IV + I = I + III + D$$

H 4

Re.

PROBLEMA XXIX.

241. *Inter duos numeros 9 & 13. medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22. dividatur bifariam sive per 2. Quotus 11 erit numerus quæsitus (§. 237.).

PROBLEMA XXX.

242. *Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus secundus 5 addatur tertio 9.
2. A summa 14 subtrahatur primus 8. Residuus 6 est quartus quæsitus. (§. 239.)

CAPUT VIII.

DE

LOGARITHMIS.

DEFINITIO LV.

243. Series quantitatum juxta eandem rationem crescentium vel decrescentium vocatur *Progressio Geometrica*. E. gr. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128, vel 729. 243. 81. 27. 9. 3. 1.

DEFINITIO LVI.

244. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium vel de-

decrementum dicitur *Progressio Arithmetica*. E. gr. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30, vel 32. 28. 24. 20. 16. 12. 8. 4.

DEFINITIO LVII.

245. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus subscribantur totidem alii æquidifferentes, dicuntur hi illorum *Logarithmi*: E. gr. Sint duæ progressiones;

Geom. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.
Arith. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
erit 0 logarithmus termini primi 1; 5. logarithmus sexti 32; 7 logarithmus octavi 128. &c.

COROLLARIUM I.

246. Si progressio arithmetica fuerit series numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi designant distantias numerorum proportionalium ab unitate.

COROLLARIUM II.

247. Cumque in progressionem geometricam ab unitate incipiente termini sint dignitates ordine naturali se mutuo excipientes (§. 175. 243.), si progressio arithmetica eadem sit, quæ in exemplo allato, logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 176.). E. gr. 2 est dignitas prima ejusque exponens 1, 64 dignitas sexta ejusque exponens 6.

THEOREMA XXXIII.

248. Si Logarithmus unitatis sit 0; erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad factorem unum ita factor alter ad factum (§. 45.). Quare logarithmus facti est æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 245.), adeoque differentia inter logarithmum unitatis & summam logarithmorum efficientium (§. 242.). Sed logarithmus unitatis est 0, per hypoth. Ergo summa ex logarithmis efficientium est logarithmus facti Q. e. d.

COROLLARIUM I.

249. Cum factores quadrati sint inter se æquales, hoc est, quadratum sit factum ex radice in seipsam (§. 171.); logarithmus quadrati est duplus logarithmi radicis,

COROLLARIUM II.

250. Eodem modo patet, logarithmum cubi esse triplum (§. 173.); biquadrati quadruplum; potentiæ quintæ quintuplum; sextæ sextuplum &c. logarithmi radicis (§. 175.)

COROLLARIUM III.

251. Est ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus radicis ad logarithmum potentiæ seu ipsius dignitatis (§. 176. 179.).

Co.

COROLLARIUM IV.

252. Quare logarithmus potentiae prodit, si logarithmum radice multiplices per exponentem ejus (§. 45.); adeoque logarithmus radice habetur, si logarithmus dignitatis per ejus exponentem dividitur (§. 144.).

SCHOLIUM.

253. E. gr. 3. summa logarithmorum 1 & 2 est logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 summa logarithmorum 2 & 5 est logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus radice quadrata 8 est dimidius logarithmi 6 quadrati 64, & 2 logarithmus radice cubica 4 est subtriplex logarithmi 6 cubi 64.

THEOREMA XXXIV.

254. Si logarithmus unitatis est 0, erit logarithmus quoti æqualis differentiae logarithmorum divisoris & dividendi.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 48.). Quare logarithmus quoti est æquidifferentium quartus ad logarithmos divisoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 245.), adeoque differentia inter logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 242.). Sed logarithmus unitatis est 0, per hypoth. Ergo differentia logarithmi divisoris

ris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. *Q. e. d.*

S C H O L I O N I.

255. *E. gr. 2. differentia inter 7 & 5 est logarithmus quoti 4 ex 128 per 32. Similiter 5 differentia inter 8 & 3 est logarithmus quoti 32 ex 256 per 8.*

S C H O L I O N II.

256. *Pro logarithmis numerorum 1, 10, 100, 1000, 10000 assumerunt Tabularum conditores 0, 1, 2, 3, 4; sive ut intermediorum logarithmos per fractione decimales exprimerent 0, 00000000, 1. 00000000, 2. 00000000, 3. 00000000, 4. 00000000. Hincque laboriosissimo modo omnium numerorum logarithmos ab 1 usque ad 10000; immo postea usque ad 100000 deduxerunt, quemadmodum in Elementis docetur. Characteristica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10 est 0; pro numeris a 10 ad 100 est 1; pro numeris a 100 ad 1000 est 2 &c.*

P R O B L E M A XXXI.

257. *Invenire logarithmum pro' numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen 10,000,000.*

R E S O L U T I O.

1. Resecentur 4 notæ ad finistram numeri dati & earum ex canone excerpatur logarithmus.

2. Cha-

2. Characteristicæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram residuæ (§. 256.).
3. Logarithmus inventus subtrahatur a proxime sequente in canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum ad differentiam tabularem logarithmorum ipsis respondentium; ita notæ residuæ numeri dati ad differentiam logarithmicam *per probl. 28.* (§. 215.) inveniendam: quæ si
5. Addatur logarithmo *per n. 1. & 2* invento; summa erit logarithmus quæsitus.

E. gr. Quæritur logarithmus numeri 92375.
 Reseca quatuor notas 9237 & characteristicam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus respondentis 3. 9655309 auge unitate. Hinc
 e logarith. numeri 9238 = 3. 9655780
 subduc. log. num. 9237 = 3. 9655309

relinquitur differ. tab. - - 471

Inferatur: 10 — 471 — 5

5) 2 ————— 1 (§. 229.).

235

Jam logarithmo 4. 9655309
 addatur different. inventa 235

Summa est logar. quæs. 4. 9655544

SCHOLIION.

258. Differentiæ equidem logarithmorum non sunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis scrupulosi non sumus, metho-
 dus

aus tradita sufficit, si præsertim notæ residuæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in nostro casu adeo exactum reperimus, ut accuratior in tabulis majoribus Briggii non occurrat.

PROBLEMA XXXII.

259. Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris subtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Residuo præfigatur signum subtractionis —.

E. gr. Quærendus est logarithmus fractionis $\frac{2}{7}$.

Logarithmus 7 = 0.8450980

Logarithmus 3 = 0.4771213

Logarithm. $\frac{2}{7}$ = — 0.3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus, ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 165.); logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 254.), adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus e minore subtrahendus, quo in casu differentia evadit negativa (§. 80.) Q. e. d.

SCHOLIUM.

260. Logarithmum fractionis propria esse negativum, si unitatis sit 0, jam notavit Stifelius.

Et mirum non est. Fractio enim minor unitate (§. 151.). Sed unitatis logarithmus est 0 (§. 256.). Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.

COROLLARIUM I.

261. Cum in fractione spuria $\frac{2}{3}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 165. 254.).

$$\text{Logarithmus } 9 = 0.9542425$$

$$\text{Logarithmus } 5 = 0.6989700$$

$$\text{Logarithmus } \frac{2}{3} = 0.2552725$$

COROLLARIUM II.

262. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{3}$ ad fractionem spuriam $\frac{2}{3}$ reduci possunt (§. 154.); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

$$\text{Logarithmus } 23 = 1.3617278$$

$$\text{Logarithmus } 7 = 0.8450980$$

$$\text{Logarithmus } 3\frac{2}{3} = 0.5166298$$

PROBLEMA XXXIII.

263. Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in tabulis accuratus non occurrit.

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 256.).

I. Lo-

1. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas *per probl. 28.* (§. 215.) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis respondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

E. gr. Quæratnr numerus respondens Logarithmo 3. 7589982

Logarithmus proxime major 3. 7590632
 minor 3. 7589875

Differentia prima 757
 Logarithmus datus 3. 7589982
 proxime minor 3. 7589875

Differentia secunda 107
 757-100-107 107.00 14
 100 757:
 10700 313.0
 3028
 102

Cum numerus logarithmo minori conveniens sit 5741; quæsitus erit 5741 $\frac{1}{10}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, 1 vel 2 (§. 256.), characteristica mutatur in 3 & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eadem

dem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristica unitates accessere (§. 256.)

E. gr. Quæratür numerus logarithmo 1. 9201662 conveniens. Cum in tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime majori respondet numerus 83. 21. Est itaque quæsitus 83 $\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus, per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA XXXIV.

264. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis, qui in tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo tabulæ minor.
2. Quæratür numerus ei respondens (§. 263.) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000. Factum est numerus quæsitus (§. 256.)

E. gr. Quærendus est numerus logarithmi 7. 7589982, Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est, 4. 0000000, ut relinquatur 3. 7589982, cui respondens numerus 5741 $\frac{1}{100}$ ducatur in 10000. factum 57411400 erit numerus quæsitus.

Wolf. Mathes. P. I. I 265.

S C H O L I O N.

265. Facile apparet, subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in tabula currentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio tædiosa evadit.

P R O B L E M A XXXV.

266. Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.

R E S O L U T I O.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulæ five numeri 10000, hoc est, ille ab hoc subtrahatur.
2. Logarithmo residuo conveniens numerus quærat (S. 263.). Dico, hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

E. gr. Quærat fractio respondens Logarithmo defectivo — 0. 3679767. Hic ex
4. 0000000 subd.

relinquit 3. 6320233, cuo
convenit numerus 4285 $\frac{71}{10}$ Est ergo fracti-
quæsitæ $\frac{428571}{10000}$.

D E M O N S T R A T I O.

Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (S. 165.); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (S. 48.). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo
rith-

rithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 248. 45.): Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 218.). Q. e. d.

PROBLEMA XXXVI.

267. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuum est logarithmus quarti quæsitæ (§. 215. 248. 254.).

E. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.

Logarithm. 68 = 1.8325089

Logarithm. 3 = 0.4771213

Aggregatum = 2.3096302

Logarithmus 4 = 0.6020600

Logarith. quæf. 1.7075702,

cui in Tabulis respondet numerus 51.

SCHOLIUM.

268. *Problematis hujus usus præstantissimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæsitæ sunt a Briggio & Vlacco Logarithmi, cum Neperus tantum canonem utus diversæ indolis logarithmorum pro sinibus & tangen-*

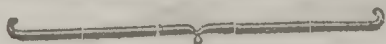


tibus construxisset. Tyrones igitur hanc de Logarithmis doctrinam tanvisper seponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.

CAPUT IX.

DE

FRACTIONIBUS DECIMALIBUS.



DEFINITIO LVIII.

269. *Fraçtio decimalis est, cujus denominator est articulus quidam primarius 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 218.).*

COROLLARIUM I.

270. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLIUM.

271. E. gr. Si fuerit fraçtio decimalis $\frac{34567}{100000}$, eadem aequaleat huic seriei: $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{7}{100000}$, cujus denominatores I. 10. 100. 1000. 10000. 100000 in ratione decupla progrediuntur.

COROLLARIUM. II.

272. Quoniam Logarithmi progressionis geometricæ I. 10. 100. 1000. 10000. 100000 sunt 0. 1. 2. 3. 4. 5. (§. 256.); si fraçtiones decimales sub forma numerorum integrorum scri-

scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{7}{1000000}$
aut $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{7}{1000000}$
scribatur 3. 42857 (§. 219.), loco deno-
minatorum numeratoribus solitarie positis op-
portune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi.
Ita loco fractionis $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{7}{1000000}$ scribimus 3°.
4' 2" 8''' 5^{iv} 7^v.

COROLLARIUM III.

273. Quoniam apices, qui sunt logarithmi
denominatorum fractionum decimalium, in se-
rie numerorum naturalium progrediuntur; suf-
ficit notæ ultimæ adjici apicem convenien-
tem, ceteris omittis, veluti in nostro casu
3. 42 857^v.

DEFINITIO LIX.

274. *Fraçtio decimalis exacta est, quæ*
veram exhibet rationem partis, quam
designat, ad totum.

E. gr. O. $8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem
partis 4 ad totum 5 veram, cum sit 8: 10
= 4: 5 (§. 130.).

DEFINITIO LX.

275. *Fraçtio decimalis approximans*
est, quæ rationem partis, quam desig-
nat, ad totum exhibet prope veram,
nempe vel vera minorem, vel majorem,
defectu tamen vel excessu infra unita-
tem notæ ultimæ convenientem existente.

E. gr. $\frac{4}{5} > 0.42857$, sed < 0.42858 .
Exprimit adeo fraçtio approximans $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ ratio-

tionem non nisi prope veram defectu scilicet existente minore, quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXI.

276. *Notæ fractionum decimalium ejusdem ordinis dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.*

E. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0.42857 & 0.0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex^{III}: nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XXXVII.

277. *Fractiones decimales addere vel a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO

Quoniam fractiones decimales perinde ac numeri integri constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 270.): notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 73. 78.), nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 275).

Vide exemplum

I. Additionis:

3.50782 ^v	0.0638 ^{iv}
0.0003	0.00562 ^v
51.247	7.138
<hr/>	
54.75512	7.20742

II.

II. Subtractionis.

$$\begin{array}{r}
 2.7864^{\text{iv}} \\
 - 0.158 \\
 \hline
 2.6284
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0.95436^{\text{v}} \\
 - 0.08512 \\
 \hline
 0.86924
 \end{array}$$

PROBLEMA XXXVIII.

278. *Fractiones decimales per se invicem multiplicare.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 219.), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 85.), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 272.), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 248.).

E. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{100000}$ hoc est, 0.42857^{v}

0.42857

0.0047

299999

171428

0.002014279

apicem ultimum producti; unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphas, quarum prima puncto notata designat locum integrorum,

per 0.0047^{iv} multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7 & deinde in 4 sive 40.

Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat

PROBLEMA XXXIX.

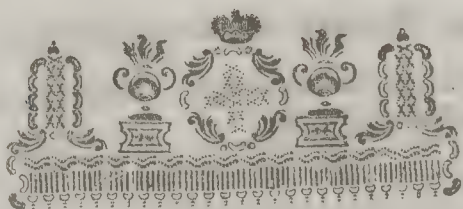
279. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 219.), divisio peragitur ut in numeris integris (§. 87.), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (272.), apex quoti invenitur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 254.) & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

E. gr. Si 0.002014279 dividatur per 0.0047, quotus est 0.42857 (§. 278. 144.). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3 & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur, eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0.002014279 dividatur per 0.42857 quotus est 0.0047 (§. cit.). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 272.), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0.0047.

ELE.



ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
DE
ARITHMETICA
SPECIOSA.

CAPUT I.
DE
ARITHMETICA RATIONA-
LIUM.

DEFINITIO I.

280. *Analysis mathematica est metho-
dus resolvendi problema-
ta mathematica.*

DEFINITIO II.

281. *Arithmetica speciosa est, quæ
computum quantitatum seu numerorum*

indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logistica speciosa*.

HYPOTHESIS I.

282. *Quantitatum datarum signa sint literæ Alphabeti priores, a, b, c, d &c. quæsitæ postremæ z, y, x &c. Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION.

283. *Nempe cum quantitates datæ ac quæsitæ tanquam distinctæ intellectui represententur per diversas notiones; eadem quoque tanquam distinctæ representanda sunt imaginationi per signa diversa.*

HYPOTHESIS II.

284. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ supponi possunt; eas quoque in denominatione exprimi consultum est. E. gr. Si fuerint duæ quantitates quæsitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x , major rectius dicetur $3x$, quam y .*

SCHOLION.

285. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione expectandi, ex subsequentibus patebit. Breviatur calculus idemque facilitatur: resolutiones problematum sæpe magis genuinæ inveniuntur. Alii suo loco sese offerent. Plura circa denominationem moneri possent, nisi consultius iudicavimus, ea per exemplum, quam per præcepta doceri.*

HY-

HYPOTHESIS III.

286. *Signa operationum arithmetica-
rum retineantur, quæ in Arithmetica
communi tradidimus (§. 42. 44. 47. 50.
178. 209.), nisi quod quantitates se
mutuo dividentes, ubi commodum fuerit,
instar fractionum scribantur.*

$$\text{E. gr. } \frac{a}{b} = a:b; \frac{1}{4} = 1:4$$

SCHOLIUM.

287. *Vulgo multiplicationis signum est X. E.
gr. ab scribitur a x b. Sed cum hoc signum facile
cum litera x a typothetis confundatur; usus ejus meri-
to improbatur.*

HYPOTHESIS IV.

288. *Si vel unus, vel ambo factores
ex pluribus literis componuntur; com-
positi parenthesi () includuntur. E.
gr. Factum ex $a+b-c$ in d ita scribitur:
 $(a+b-c) d$. Similiter factum ex $a+b-c$ in
 $d-g$ hunc in modum: $(a+b-c) (d-g)$.*

SCHOLIUM.

289. *Vulgo hæc facta ita scribunt:*
 $d X a+b-c$ & $a+b-c X d-g$.

*Sed cum hæc scriptio typothetis molestias creet, in-
primis si ex alio capite linearum supra literas ducen-
da rum*

darum numerus multiplicatur, signis Leibnitianis utendum esse judicamus.

HYPOTHESES V.

290. Si quantitatū se mutuo dividendum una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; signo parentheseos () similiter utimur, nisi circumstantiæ singulares suadeant, eas fractionum instar scribi. E. gr. Quotus ex $a+b$ per c ita scribitur; $(a+b):c$. Quotus vero ex $a+b$ per $c-d$ ita exprimitur; $(a+b):(c-d)$. Similiter $a:(a+b)$ designat quotum ipsius a per $a+b$ divisi. Idem quoti communiter ita scribuntur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

HYPOTHESIS VI.

291. Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per m, n, r, s, t &c. E. gr. x^m, y^n, z^r , &c. designant potentias indeterminatas diversi generis (§. 178.); mx, ny, rz , multipla vel submultipla diversa quantitatū x, y, z , prout m, n, r vel numeros integros, vel fractos designant (§. 98.)

HYPOTHESIS VII.

292. Si radix ex pluribus literis componitur, parenthesi includitur & exponens

nens ipsi suffigitur, ut ante. E. gr.
 $(a+b-c)^2$ designat quadratum ex $a+b-c$;
 $(a+b-c)^m$ potentiam quamlibet seu indeterminatam ipsius $a+b-c$.

S C H O L I O N.

293. Communiter ita scribunt: $a+b-c$.

$a+b-c$

D E F I N I T I O III.

294. Quantitas signo $+$ affecta dicitur *positiva*, item *affirmativa* atque *nihilo major*: quæ vero signo $-$ afficitur, *privativa*, item *negativa* atque *nihilo minor*, a nonnullis absurda.

C O R O L L A R I U M I.

295. Quoniam $+$ est signum additionis (§. 42.): $-$ vero signum subtractionis (§. 44.) quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$, $0+a=+a$; privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahitur, e. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

S C H O L I O N I.

296. Ponamus, te habere nummorum nihil tibi-
 que donari 100: habebis ergo 100 nummos, adeo-
 que plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi
 summi quantitatem positivam constituunt. Ponamus
 : contrario, te nihil habentem solvere debere 100
 nummos; 100 ergo nummorum debitum contrahes,
 adeoque, antequam solutio fiat minus nihilo habebis.
 Solvendi enim sunt 100 nummi, ut nihil habeas.

Hoc

Hoc debitum quantitas negativa est. Notandum vero quantitates positivas initio vel solitarie positas signo nullo affici. Cur vero positivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex corollario patet.

COROLLARIUM II.

297. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; consequenter non quantitates veræ.

SCHOLION II.

298. Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & sic intelligibilis evadit.

COROLLARIUM III.

299. Si residuo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua subtractio facta (§. 81.) Ergo $-a + a = 0$, $-3 + 3 = 0$ (§. 295.), hoc est, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ se mutuo destruunt.

THEOREMA I.

300. Quantitas quælibet pro unitate assumi potest.

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (§. 2.), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§. 10.) Ergo ipsa pro unitate assumi potest (§. 3.). Q. e. d.

PRO-

PROBLEMA I.

301. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur ut in Arithmetica communi.
2. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem & residuo præfigitur signum majoris.
3. Quantitates diversis literis notatæ junguntur mediante signo + (§. 286.)

$$\begin{array}{r}
 4a+2b-2c-5d-g \qquad a-b \\
 5a-2b+6c+2d-3g \qquad \qquad c \\
 \hline
 9a+4c-3d-4g \qquad a-b+c
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (§. 300.); erit $a+a+a+a=4a$, consequenter $4a+5a=9a$ (§. 73.). Eodem modo patet esse $-g-3g=-4g$. Quod erat unum.

Quoniam $6c=1c+2c$, per demonstr. erit $6c-2c=4c+2c-2c$ (§. 69.). Sed $2c-2c=0$ (§. 299.). Ergo $6c-2c=4c$. Similiter $-5d=-3d-2d$, per demonstr. Sed $-5d+2d=-3d-2d+2d$ (§. 66.) & $-2d+2d=0$ (§. 299.). Ergo

Ergo $-5d+2d=-3d$. Quod erat alterum.

Tertium per se patet (§. 286.).

SCHOLIUM.

302. Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus a denotare thalerum, b grossum, c nummum; habebimus

$$7a-9b+5c=7 \text{ th.}-9 \text{ gr.}+5 \text{ num.}$$

$$3a+5b-9c=3 \quad +5 \quad -9$$

$$10a-4b-4c=10 \text{ th.}-4 \text{ gr.}-4 \text{ num.}$$

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 thalerorum deficiunt 9 grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad 4 reducitur. Quoniam vero non 5 grossi integri, sed demtis 9 nummis summa adficiendi, summa 10 th.-4 gr. excedit genuinam 9 nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in numero superiori, cui inferior additur, occurrant 5 nummi, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc defulerantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo inventore detecta.

THEOREMA II.

303. In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in - & - in +.

DEMONSTRATIO.

Si $c+d$ fuerit subtrahenda ex $a+b$, differentiam esse debere $a+b-c-d$, adeoque signa $+$ in quantitate subtrahenda in $-$ mutari, ex hypoth. 3. (§. 286.) patet. Sed si $c-d$ subtrahenda ex $a+b$ & integrum c subtrahitur, quantitas major subducta, quam fieri debebat. Ergo quod plus iusto subtractum est d , iterum addendum. Prodit ergo $a+b-c+d$. Q. e. d.

PROBLEMA II.

304. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ signa eadem habent & minore majore subtrahenda; subtractio ut in Arithmetica communi (§. 78.) absoluitur.
2. Si vero major e minore subducenda; contraria ratione minor e majore subtrahitur & residuo præfigitur signum $-$, si quantitates signo $+$ afficiuntur; signum vero $+$, si signo $-$ gaudent.
3. Si quantitates diversa signa habent; in additionem mutatur subtractio & aggregato præfigitur signum ejus quantitatis, ex qua subtractio facta est.

Wolf. Mathes.

K

4.

4. Si quantitates diversis literis notatæ, signa subtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$8a - 5c + 9d = 8 \text{ th.} - 5 \text{ gr.} + 9 \text{ num.}$$

$$6a - 8c - 7d = 6 \quad - 8 \quad - 7$$

$$2a + 3c + 16d = 2 \text{ th.} + 3 \text{ gr.} + 16 \text{ num.}$$

$$9b + 15c - 7d + 8e - f$$

$$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$$

$$3b - 5c + 2d + 17e - 8f$$

$$a + b - c \quad a + d$$

$$d - e + f \quad c - e - g$$

$$+ b - c - d + e - f \quad a + d - c + e + g$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ sint vel unitates eadem, vel ejusdem unitatis multiplicæ aut submultiplicæ (§. 300.) erit $8a - 6a = 2a$ (§. 25. 78.) Quod erat unum.

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ subtrahenda; erit residuum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§. 303.). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§. 301.). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. Quod erat alterum.

Si $-9e + 7f$ subtrahi debent ex $8e - f$; erit residuum $8e - f + 9e - 7f$ (§. 303.). Sed $-f - 7f = -8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§. 301.). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. Quod erat tertium.

Quartum patet per theorema (§. 303.).

Aliter.

Aliter.

1. Signa quantitatis subtrahendæ mutentur in contraria (§. 303.): quo facto
2. Additio fiat (§. 301.) seu, quæ se mutuo destruunt, deleantur.

E. gr. si ex $9b + 15c - 7d + 8e - f$ subtrahi debet $6b + 20c - 9d - 9e + f$, fiat (§. 303.) $= 6b - 20c + 9d + 9e - f$; erit (§. 301.) residuum $3b - 5c + 2d + 17e - 2f$. Nimirum $+ 6b - 6b$, $+ 15c - 15c$, $- 7d + 7d$, se mutuo destruunt (§. 299.).

THEOREMA III.

305. Si quantitas positiva per positivam multiplicetur aut dividatur, in utroque casu quantitas prodit positiva.

DEMONSTRATIO.

Est enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 45.) Sed uterque factor est positivus, per hypoth. Ergo & factum positivum esse debet. Quod erat unum.

Si $+a$ ducitur in $+b$, factum est $+ab$, per demonstr. Ergo si $+ab$ dividitur per $+a$ quotus erit $+b$; si per $+b$, quotus $+a$ (§. 144.). Quod erat alterum.

THEOREMA IV.

306. Si quantitas negativa per positivam multiplicetur aut dividatur, in utroque casu quantitas prodit negativa.

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem est ac quantitatem aliquam aliquoties sibimetipſi addere (§. 46.). Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 301.). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. Quod erat unum.

Factum ex $-a$ in $+b$ est $-ab$ per demonstrationem. Ergo si $-ab$ dividitur per $+b$, quotus est $-a$ (§. 144.). Quod erat alterum.

THEOREMA V.

307. Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur, quantitas positiva prodit.

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 45.): id quod ipsa notio quantitatis privativæ insinuat (§. 297.), utpote quæ repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 46.). Quare hæc multiplicatio proprie

proprie tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur.

Sit itaque multiplicandum $a-b$ in $a-b$. Cum a considerari possit ut radix binomia, cujus pars prima $a-b$, secunda vero $+b$, quadratum partis primæ habetur, si a quadrato a^2 subtrahatur duplum factum ex prima in secundam, una cum quadrato partis secundæ, (§. 183) sed duplum factum ex prima in secundam $= 2ab - 2b^2$ (§. 306.) quadratum vero secundæ $= b^2$ (§. 305.). Quare si hæc facta a quadrato a^2 subtrahantur, erit quadratum partis primæ, seu $(a-b)(a-b)$ (§. 171.) $= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (§. 304.) Unde apparet factum ex $-b$ in $-b$ esse $+b^2$. Quodd erat unum.

In divisione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 148.) Divisurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 297.): quotus adeo, qui idem indicat (§. 48.) utique quantitas positiva esse debet. Quod erat alterum.

THEOREMA VI.

308. Si quantitas positiva per negativam multiplicatur aut dividitur, quantitas privativa prodit.

DEMONSTRATIO.

Cum duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignant (§. 141.), perinde erit siue $-a$ in $+b$, siue $+b$ in $-a$ ducatur; sed $-a$ ductum in $+b = -ab$ (§. 306.) Ergo etiam $+b$ ductum in $-a = -ab$. Quod erat unum.

Factum ex $-a$ in $-b$ est $+ab$ (§. 307.). Ergo si $+ab$ dividis per $-a$, quotus esse debet $-b$. (§. 144.) Quod erat alterum.

THEOREMA VII.

309. In multiplicatione ac divisione eadem signa efficiunt $+$, diversa $-$.

DEMONSTRATIO.

Si quantitates se mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint positivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque casu positiva (§. 305. 307.): si vero altera privativa, altera positiva, quantitas prodit privativa (§. 306. 308.). Ergo eadem signa efficiunt $+$, diversa $-$. Q. e. d.

PROBLEMA III.

310. Quantitates tameodem quam diversis signis affectas in se invicem ducere.

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 85.), nisi quod notetur re-

regula: eadem signa faciunt + diversa — (§. 309.).

$$\begin{array}{r}
 a+c \\
 b+d \\
 \hline
 +ad+cd \\
 ab+bc \\
 \hline
 ab+ad+bc+cd
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a+b-d \\
 a-b-d \\
 \hline
 -ad-bd+dd \\
 -ab-bb+bd \\
 \hline
 aa+ab-ad \\
 aa-bb-2ad+dd
 \end{array}$$

$$10 = 8 + 4 - 2$$

$$2 = 8 - 4 - 2$$

$$-16 - 8 + 4$$

$$-32 - 16 + 8$$

$$64 + 32 - 16$$

$$20 = 68 - 48$$

Item $8 = 10 - 2$

$$7 = 10 - 3$$

$$-30 + 6$$

$$100 - 20$$

$$56 = 100 - 50 + 6$$

$$= 50 + 6$$

PROBLEMA IV.

311. Quantitates compositas dividere.

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi potest, orta nempe ex divisore in aliam (§. 144.); divisio instituitur ut in numeris (§. 87.), notata tamen regula: eadem signa faciunt +, diversa — (§. 309.).

In alijs casibus tantum observanda, quæ supra præcepimus (§. 8.).

E. gr. Dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$.

$$\begin{array}{r} aa - bb - 2ad + dd \quad (a + b - d) \\ a - b - d \quad aa - ab - ad \end{array}$$

$$\hline +ab - bb - ad + dd$$

$$\hline +ab - bb - bd$$

$$\hline +bd - ad + dd$$

$$\hline -ad + bd + dd$$

○

PROBLEMA V.

312. Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 163. 164.)

E. gr. Sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ &

$\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 162.), Ergo

summa $\frac{ad + bc}{bd}$ (§. 301).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex $\frac{c}{d}$.

$\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Er-
go differentia $\frac{bc-ad}{bd}$ (§. 304.).

PROBLEMA VI.

313. Fractionem per fractionem mul-
tiplicare aut dividere.

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arith-
metica communi (§. 166. 168.)

E. gr. Sint fractiones se mutuo multipli-

caturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; erit factum $\frac{ac}{bd}$.
Sint fractiones se mutuo divisuræ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$;

erit quotus $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c}{d}$ (§. 159.)

COROLLARIUM I.

314. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§. 39.);

erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc est, ex inte-

gra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{ac}{d}$. Un-

de patet, numeratorem fractæ multiplicandum esse per integram, si fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§. 167.),

COROLLARIUM II.

315. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a , hoc est,

ex quantitate fracta per integram divisa,

$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem

dividendi multiplicandum esse per divisorem & factum subscribendum numeratori immutato, si fractio per integrum dividenda.

PROBLEMA VII.

316. *Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, summa est exponentis facti.

x^3	y^m	y^m	a^m	x^m
x^4	y^m	y^n	a^r	x^s
x^7	y^{2m}	y^{m+n}	a^{m+r}	x^{m+s}

II. In divisione exponens dignitatis dividendi subtrahatur ab exponente dividendæ; residuum est exponens quoti.

$$\frac{x^r}{x^s} \left(x^3 y^{m+n} \right) \left(y^m \frac{a^n x^n}{a^r x^r} \right) \left(\frac{a^{m-r} x^{n-s}}{a^r x^r} \right)$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progressionem Arithmetica a cyphra sive o incipiente (§. 176. 244.) dignitates in Geometrica, cujus terminus primus est unitas (§. 175. 248.), progrediantur; illi pro harum Logarithmis recte habentur (§. 245.). Ergo summa exponentium, quos habent dignitates, se mutuo multiplicantes est exponens facti (§. 248.); differentia exponentium, quos habent dignitates semutuo dividentes, est exponens quoti (§. 254.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

317. Progressiones istæ hæc sunt:

$$x^0. x^1. x^2. x^3. x^4. x^5. x^6. x^7. \&c.$$

$$0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. \&c.$$

Nempe $x: x=x^1: x^1=x^0$ (§. 316.).

Sed $x: x=1$ (§. 48.). Ergo $x^0=1$. (§. 65.)

PROBLEMA VIII.

318. Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere, aut ex
ca-

eadem dati similiter exponentis radicem extrahere.

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data intuitu ejus, ad quam evehenda, radix est (§. 171.) & exponentes logarithmi dignitatum existunt *per demonstr.* in *probl. præc.* (§. 316.): exponens potentiae novae habebitur, potentiae datae exponente in exponentem ejus ad quam evehi debet, ducto (§. 252.)

E. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n est $x^{m \cdot n}$. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 est y^6 .

II. Non absimili modo liquet, Exponentem radiceis haberi, si exponens dignitatis datae dividatur per exponentem radiceis datum (§. 252.).

E. gr. Radix quadrata ex x^6 est x^3 : radix n ex $x^{m \cdot n}$ est x^m : radix n ex x^m est $x^{m/n}$.

COROLLARIUM I.

319. Est itaque $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ (§. 252), consequenter quantitates irrationales ad expressionem rationalem reduci possunt.

SCHOLIUM.

320. Quantum in analysi commodi afferat hac redactio, ex capite subsequente elucescet. Etenim

§



si quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non est, sed rationalium instar tractari possunt.

CAPUT II.

DE ARITHMETICA IRRATIONALIUM.

PROBLEMA IX.

321. Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ &

$\sqrt[n]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n \cdot \frac{1}{m}}$ & $\sqrt[n]{y^r} = y^{r \cdot \frac{1}{n}}$ (§. 319.); diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 162. *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n \cdot \frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$ & $y^{r \cdot \frac{1}{n}} = y^{\frac{r}{n}}$ seu $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n \cdot s}{m \cdot s}}$ & $y^{\frac{r}{n}} = y^{\frac{r \cdot s}{n \cdot s}}$ seu $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n \cdot s}{m \cdot s}}$ & $y^{\frac{r}{n}} = y^{\frac{r \cdot s}{n \cdot s}}$ (§. 319.).

E. gr.

E. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ &

$\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 319.); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 162.

hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 319.), seu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad se-

cundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

PROBLEMA X.

322. *Quantitates irrationales ad simpliciores expressionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[n]{a^m x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 319.)

& $x^{m:m} = x$ (§. 56) erit $\sqrt[n]{a^m x^m} = a^{n:m} x$

$= x \sqrt[n]{a^m}$. Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

E. gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2:

habebimus $\sqrt[3]{16} = 2 \sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur

$$\begin{aligned} \text{ritur } \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}; \sqrt[5]{18} = \\ \sqrt[4]{9 \cdot 2} &= 3\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \\ &= 2\sqrt[4]{3}. \end{aligned}$$

COROLLARIUM I.

323. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad simpliciorē expressionē reductæ sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter se ut quantitates rationales signis præfixæ (§. 127.), consequenter quantitates irrationales inter se incommensurabiles esse possunt.

E. gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ & $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$, hoc est, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$. In casu reliquo sunt incommensurabiles.

SCHOLIUM I.

324. *Isud quantitatū irrationalium genus communicantium nomine venire solet.*

COROLLARIUM II.

325. Per præsens adeo problema invenitur ratio rationalis irrationalium, si qua datur.

COROLLARIUM III.

326. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x \sqrt[m]{a^n}$ (§. 322.); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis, ad pure irrationalem reducitur, si quantitas

titas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens signo radicali præfixus, & dignitas per quantitatem sub signo radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} =$

$$\sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{50} \text{ \& } 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{3 \cdot 125} \\ = \sqrt[3]{375}.$$

S C H O L I O N.

327. Quodsi quæſiveris, quomodo in resolutione imoteſcat, utrum quantitas sub ſigno radicali poſita per potentiam aliquam requiſitam ſit diviſibilis, nec ne, & quænam ſit iſta potentia; in diviſores reſolvenda eſt, inter quos locum obtineant neceſſe eſt omnes potentia à prima uſque ad requiſitam, ſi cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an $\sqrt[4]{368}$ ſit diviſibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Reſoluturus numerum 368 in ſuos diviſores, reperiet

2	184
4	92
8	46
16	23,

tentando nempe diviſionem per numeros minores & quotos majores à latere ponendo. Invenies hic 2 potentiam primi gradus, 4 potentiam ſecundi, 8 potentiam tertii & 16 potentiam quarti. Ergo 16 eſt diviſor quæſitus, conſequenter $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

- PROBLEMA XI.

328. *Quantitates irrationales addere,
aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ (§. 322.) fuerint commensurabiles (§. 324.); quantitates rationales extra vinculum adduntur, & a se invicem subtrahuntur, ibique summa, hic differentia denuo præfigitur signo radicali. Reliqua omnia sunt ut in additione & subtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 322.) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 326.) &

$\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} + \sqrt[3]{3 \cdot 27} = 2\sqrt[3]{3}$

$+ 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} =$

$\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} =$

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum sint incommensurabiles (§. 323.); summa erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 301.), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 304.).

Hinc & intelliguntur exempla in compositis, tum in additione:

$$\begin{array}{r}
 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\
 \hline
 \sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} \\
 \hline
 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5} \text{ sum:} \\
 \text{hoc est } \sqrt{3 \cdot 25} + \sqrt{2 \cdot 16} + \sqrt{7 \cdot 100} + \sqrt{5 \cdot 16} \\
 \text{seu } \sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80} \\
 \text{tum in subtractione:} \\
 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} \\
 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \\
 \hline
 2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10} \text{ different:} \\
 \text{hoc est } \sqrt{2 \cdot 4} - \sqrt{3 \cdot 144} + \sqrt{10 \cdot 289} \\
 \text{seu } \sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{2890}
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO

Omnia manifesta sunt ex demonstratione
probl. (§. 301. 304.).

PROBLEMA XII.

329. *Quantitates irrationales per ir-
rationales multiplicare ac dividere.*

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quan-
titates sub signo radicali; ibi facto, hic
quoto præfigatur signum idem radicale
cum suo exponente. Quodsi radicales
quantitates fuerint diversæ denomina-
tionis, ante omnia reducantur ad eandem
(§. 321.).

E. gr. In multiplicatione $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$ & $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in
compositis:

$\sqrt{3}$

CAP. II. DE ARITH. IRRATIONAL. 163

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \\
 \hline
 \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \\
 \hline
 -\sqrt{6} - 2 \quad +\sqrt{6} + 3 \\
 \hline
 3 + \sqrt{6} \quad 2 + \sqrt{6} \\
 \hline
 3 - 2 = 1 \quad 2\sqrt{6} + 5 \\
 \hline
 7\sqrt{3} - 5\sqrt{2} \\
 5\sqrt{8} + 3\sqrt{6} \\
 \hline
 +21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} \\
 \hline
 35\sqrt{24} - 100 \\
 \hline
 35\sqrt{24} + 21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} - 100 \\
 \hline
 h. e. \quad 70\sqrt{6} + 63\sqrt{2} - 30\sqrt{3} - 100 \\
 \hline
 \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{32} \\
 \hline
 \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{32} \\
 \hline
 +16 + 8 + 32 \\
 \hline
 +4 + 2 + 8 \\
 \hline
 8 + 4 + 16 \\
 \hline
 98
 \end{array}$$

Similiter in divisione $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$
 & $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. Item in compositis:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{12} (\sqrt{5} - \sqrt{2} + 2 \\
 \sqrt{3}) \sqrt{15} \\
 \hline
 -\sqrt{6} + \sqrt{12} \\
 \hline
 -\sqrt{6} \\
 \hline
 \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\
 2\sqrt{3} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

SCHOLIUM.

330. Radices imaginariæ dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti $\sqrt{-2}$, cum

cum quadratum—2 sit quantitas impossibilis, propterea, quod omne quadratum sit positivum (§. 309. 171.) Facile autem patet, additionem & subtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium. Id quod in Elementis Matheſeos uniſerſe docetur.

CAPUT III.

DE

USU CALCULI LITTERALIS IN INVENIENDIS THEOREMATIS.

PROBLÉMA XIII.

331. *Determinare summam termini primi & ultimi in progressionem arithmetica.*

Sit terminus primus a , differentia terminorum sive crescentium, sive decrescentium d , erit (§. 244.)

$$\begin{array}{r}
 a, \quad \underline{a+d}, \quad \underline{a+2d}, \quad \underline{a+3d}, \quad \underline{a+4d}, \quad \underline{a+5d} \\
 \underline{a+4d} \qquad \qquad \underline{a+2d} \\
 2a+5d \qquad \qquad 2a+5d \\
 \underline{\qquad \qquad \qquad} \\
 \qquad \underline{a+5d} \\
 \qquad \underline{a} \\
 \underline{\qquad \qquad \qquad} \\
 \qquad \underline{2a+5d}
 \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{r}
 a, \quad \underline{a+d}, \quad \underline{a+2d}, \quad \underline{a+3d}, \quad \underline{a+4d} \\
 \underline{a+3d} \qquad \underline{2} \qquad \underline{a} \\
 2a+4d \quad 2a+4d \qquad 2a+4d
 \end{array}$$

Theor.

Theorema : In progressionē arithmetica tam crescente, quam decrescente summa termini primi & ultimi æqualis est summæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidistantium aut medii duplo, si numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{E. gr.} & 3. & 6. & 9. & 12. & 15. & 18. & 21. \\ & & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & & 24 & =24 & =24 & =24 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

332. Habetur ergo summa progressionis arithmeticæ, si summa termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM II.

333. Quod si adeo sit terminus primus a , differentia d , numerus terminorum n , erit ultimus $a + (n - 1)d$ (§. 244.), consequenter summa progressionis $\frac{1}{2}n(2a + (n - 1)d)$ (§. 332.) $= an + \frac{1}{2}(n^2 - n)d$. Ex datis itaque termino primo a , differentia d & numero terminorum n invenitur summa progressionis, si facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in semidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejusdem. E. gr. Sit $a=3$, $n=7$, $d=3$, erit summa $= 21 + \frac{42}{2} = 42$.

$$= 21 + \frac{42}{2} = 42. \quad 3 = 21 + 21. \quad 3 = 21 +$$

$$\frac{63}{2} = 84.$$

L 3

SCHO.

S C H O L I O N. I.

334. Notent tyrones regulas ex symbolis eruturi, ab initio gradatim esse progrediendum, exprimendo nempe sigilatim quodlibet symbolum per rem denotatam & quamlibet operationem signis representatam per nomina convenientia E. gr. In an est a terminus primus & n numerus terminorum, ex hypoth. Sed an est factum ex a in n (§. 286.). Ergo pro an substituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Torro n^2 est quadratum ipsius n (§. 178.). Sed n est numerus terminorum: ergo n^2 quadratum numeri terminorum. Signum — indicat subtractionem (§. 286.). Quare $n^2 - n$ differentia numeri terminorum ab ejus quadrato & $\frac{1}{2}$ ($n^2 - n$) semidifferentia ista. Torro d est differentia terminorum ex hypoth. adeoque $\frac{1}{2} (n^2 - n)$ d factum ex illa semidifferentia in differentiam terminorum. Denique signum + indicat facta hactenus explicata esse addenda. Hac quidem syllabizatione opus habent, qui sine mora symbolicas expressiones quantitatum sibi familiares reddere gestiunt.

COROLLARIUM III.

335. Sit $a=1$, $d=2$, hoc est, sit series numerorum imparium 1. 3. 5. 7 &c. erit summa $= n + n^2 - n$ (§. 333.) $= n^2$ (§. 299.) Patet adeo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione, consequenter differentias numerorum quadratorum esse numeros impares.

COROLLARIUM IV.

136. Sit $a = n = \frac{1}{2}d$, erit summa $= n^2 + n^2 = n^2$ (§. 333.) $= n^3$ (§. 299.) Quilibet adeo cubus resolvitur in progressionem arithmeticam, cujus terminus primus, semidifferentia & numerus terminorum sunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

SCHOLIUM II.

337. Patet modus ex formulis algebræ eruendi theorematum specialia, qui continetur sub problemate logico de specierum notionibus ex notionem generis formandis

DEFINITIO IV.

338. Denominator rationis est quotus ex divisione termini majoris per minorem emergens.

COROLLARIUM I.

339. Major ergo prodest; minore per denominatorem multiplicato (§. 146.): minor vero habetur, majore per denominatorem diviso (§. 144.). Unde si terminus minor a , denominator m ; erit major ma ;

si terminus major a , minor erit $\frac{a}{m}$. Quare a ;

ma exprimit rationem minoris inæqualitatis;

L 4

a:

a : — vero rationem majoris (§. 96.). Immo

quoniam $\frac{a}{m} = a \cdot \frac{1}{m}$ (§. 314.); si m explicetur

per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, a : m a rationem quamcunque designat.

COROLLARIUM II.

340. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major consequente (§. 96.); ejus denominator idem est cum exponente, (§. 98.)

COROLLARIUM III.

341. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{m}$ (§. 98. 339.), hoc est

$\frac{1}{m}$ (§. 159.). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas; denominator idem cum denominatore rationis.

PROBLEMA XIV.

342. Determinare factum ex termino primo in ultimum progressionis geometricæ.

Sit terminus primus a , denominator m ; erit progressio (§. 243. 339.).

$$\begin{array}{r} a. \quad m \cdot a. \quad m^2 \cdot a. \quad m^3 \cdot a. \quad m^4 \cdot a. \quad m^5 \cdot a. \\ m^5 a \quad m^3 a \quad m^2 a \quad a \\ \hline m^5 a^2 = m^6 a^2 = m^6 a^2 = m^6 a^2 \end{array}$$

Theorema. In progressione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidistantium, itemque medii quadrato, si numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{r} \text{E. gr.} \quad 3. \quad 6. \quad 12. \quad 24. \quad 48. \quad 96 \\ \quad \quad \quad 12 \quad \quad 6 \quad \quad 3 \\ \hline 238 = 288 = 288 \end{array}$$

PROBLEMA XV.

343. Determinare quotum ex divisione differentia terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate multiplicatum emergentem.

Sit terminus primus a , denominator m , numerus terminorum n ; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi $m^{n-1}a - a$. Hæc si dividatur per $m-1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$\begin{array}{r}
 m^{n-1}a - a \\
 (m-1)m^{n-1}a - m^{n-2}a \\
 \hline
 +m^{n-2}a - a \\
 m^{n-2}a - m^{n-3}a \\
 \hline
 +m^{n-3}a - a \\
 m^{n-3}a - m^{n-4}a \\
 \hline
 +m^{n-4}a - a \\
 m^{n-4}a - m^{n-5}a \\
 \hline
 +m^{n-5}a - a \\
 m^{n-5}a - m^{n-6}a \\
 \hline
 +m^{n-6}a - a \\
 \hline
 \&c.
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 m^{n-2}a + m^{n-3}a \\
 +m^{n-4}a + \\
 m^{n-5}a + m^{n-6}a \\
 +m^{n-7}a \&c.
 \end{array} \right.$$

Quodsi n determinetur, e. gr. per 7, erit $n-7=0$, consequenter $m^{-7}a=m^0a=a$, adeoque divisio terminatur. Unde patet.

Theorema I. Si Differentia termini primi & ultimi progressionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mûltatum, quotus est summa omnium terminorum excepto maximo.

Et cum sit $m-1:1=m^{n-1}a-a:m^{n-2}a+m^{n-3}a \&c. +a$ (§. 123. 119.); patet porro

Theorema II. In progressionem geometricam est ut denominator unitate mûltatus ad unitatem, ita

ita differentia termini maximi & minimi ad
 summam omnium terminorum excepto maximo.

COROLLARIUM. I.

344. Quodsi ergo quoto ex divisione dif-
 ferentiæ termini maximi & minimi per de-
 nominatorem unitate multiplicatum emergenti
 maximus addatur; summa totius progressionis
 habetur.

COROLLARIUM II.

345. Sit adeo terminus primus a , de-
 nominator m , numerus terminorum n , erit
 terminus ultimus seu maximus $m^{n-1}a$, adeo-
 que summa $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1) =$
 $m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a : (m - 1)$ (§. 162.)
 $= (m^n a - a) : (m - 1)$ (§. 299.), con-
 sequenter si eadem summa dicatur S , $m - 1 :$
 $m^n - 1 = a : S$, (§. 215.). Est adeo terminus
 primus (seu minimus) progressionis ad ejus
 summam ut denominator unitate multiplicatus ad
 ejus dignitatem, cujus exponens numero ter-
 minorum æqualis, unitate itidem multiplicatus.
 Sit e. gr. $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, erit summa
 $(256 - 1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM. III.

346. Quoniam si terminus primus a deno-
 minator m ; terminus ultimus $m^{n-1}a$, summa
 $(m^n a - a) : (m - 1)$ (§. 345.): erit differentia inter
 ter-

I. $a:ma$

$\frac{c}{c'}$

$ac:mac=a:ma$

II $a:ma$

$\frac{c}{c}$

$\frac{a}{c}:\frac{ma}{c}$

$\frac{a}{c}:\frac{ma}{c}=a:ma$

$\frac{c}{c}$

III. $a:ma$

$b:mb$

$a-b:ma-mb=a:ma=b:mb$

IV. $a:ma$

$b:mb$

$a+b:ma+mb=a:ma=b:mb$

Sit porro

erit alternatim $a:ma=b:mb$
inverse $a:b=ma:mb$
conversim $ma:a=mb:b$
 $a+ma:a=b+mb:b$

composite $a+ma:ma=b+mb:mb$

Divisim $ma-a:a=mb-b:b$
 $ma-a:ma=mb-b:mb$

Item: $a^n:m^n=a^n:b^n$

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{ma}=\sqrt[n]{b}:\sqrt[n]{mb}$

$a:ma$

$$a:mac=b:mbc$$

$$a:\frac{ma}{c}=b:\frac{mb}{c}$$

$$ac:ma=bc:mb$$

$$\frac{a}{c}:ma=\frac{b}{c}:mb$$

$$ac:mac=b:mb$$

$$\frac{a}{c}:\frac{ma}{c}=b:mb$$

$$ac:mac=bd:mbd$$

$$\frac{a}{c}:\frac{ma}{c}=\frac{b}{d}:\frac{mb}{d}$$

$$ac:mad=bc:mbd$$

$$\frac{a}{c}:\frac{ma}{d}=\frac{b}{c}:\frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a:ma=b:mb$
& $ma:mna=mb:mnb$

erit ex æquo $a:mna=b:mnb$

Sit perturbate $a:ma=b:mb$

& $ma:mna=\frac{b}{n}$

erit ex æquo $a:mna=\frac{b}{n}:mb$

Ipsæ nimirum expressiones, si quoti
reducantur per regulas fractionum, ra-
tio-

tionum similitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac:mac=1:m$ & $b:mb=1:m$.
En utrobique exponentem eundem $1:m$!

CAPUT IV.

DE

ALGEBRA

AD

PROBLEMATATA ARITHMETICA

TAM

DETERMINATA QUAM INDETERMINATA APPLICATA.

DEFINITIO V.

349. *Algebra* est methodus resolvendi problemata per æquationes.

DEFINITIO VI.

350. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales, e. gr. $2. 3=1+2$.

DE-

DEFINITIO VII.

351. *Radix æquationis* est valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. U. gr. Si fuerit $a^2 + b^2 = x^2$; radix erit $\sqrt{a^2 + b^2}$.

DEFINITIO VIII.

352. Si valor ipsius x fuerit positivus, e. gr. $x=3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO IX.

353. Si valor ipsius x fuerit negativus, e. gr. $x=-5$, *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO X.

354. Si valor ipsius x fuerit *radix* quantitatis negativæ, e. gr. $\sqrt{-5}$, *imaginaria* appellatur (§.330.).

DEFINITIO XI.

355. *Æquatio* dicitur *simplex*, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis, e. gr. si $x=(a+b):2$.

DEFINITIO XII.

356. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones affurgit, ut $x^2=a^2+b^2$; *cubica*, si ad tres, ut $x^3=a^3-b^3$ &c.

PROBLEMA XVII.

357. *Problema datum Algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 282.)
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *problema non esse determinatum*, sed unam vel plures quæsitæ pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem æquationes, nisi in ipso problemate contineantur, per theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitæ sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 66. 69. 71. 72. 179. 180.).

PROBLEMA XVIII.

358. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2=ab$; evidens est esse $x=\sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2+ax=+b^2$; tum x assumatur pro una parte radice, erit a quantitas cognita secundi termini duplum partis alterius (§. 183.), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, si addatur $\frac{1}{4}a^2$ (§. cit.): quo facto, radix extrahi potest, ut hic factum esse apparet:

Casus I.

$$\begin{array}{r}
 x^2+ax=b^2 \\
 \frac{1}{4}aa \quad \frac{1}{4}aa \text{ add.} \\
 \hline
 x^2+ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2+b^2 \\
 \hline
 x+\frac{1}{2}a=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)} \\
 \hline
 x=\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b^2)}-\frac{1}{2}a
 \end{array}$$

Casus 2.

$$x^2 - ax = b^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$$

$$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}$$

$$\frac{1}{2}a - x =$$

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}$$

$$\text{vel } x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}$$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)} > \frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§. 353.), atque adeo solus valor $\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}$ est radix vera (§. 352.).

Casus 3.

$$x^2 - ax = -b^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$$

$$\& \frac{1}{2}a - x$$

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$$

$$\& x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)} < \frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$ valor ipsius x positivus, consequenter radix vera (§. 352.). Habet adeo in praesente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post ex exemplis patebit.

Ceterum ex multiplicatione patet, esse $(\frac{1}{2}a - x)^2$ perinde ac $(x - \frac{1}{2}a)^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA XIX.

359. Invenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia & quarta numerum integrum unitate superat.

Si numerus quæsitus x , erit per conditionem problematis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x &= x + 1 \\ \text{hoc est } (12x + 8x + 6x) : 24 &= x + 1 \\ \text{feu } \frac{26}{24}x &= x + 1 \end{aligned}$$

————— 24. mult.

$$26x = 24x + 24$$

$$24x \quad 24x \quad \text{Subtr.}$$

$$2x = 24$$

————— 2 div.

$$x = 12$$

$$\begin{aligned} \text{Examen } \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x &= 6 + 4 \\ + 3 &= 13 = 12 + 1. \end{aligned}$$

PROBLEMA XX

360. Datis summa & differentia duarum quantitatum invenire quantitates.

Sit summa $= a$, differentia $= b$, Quantitas minor $= x$, erit major $= x + b$ (§. 64.) Quare.

$$x + b + x = a$$

$$\text{————— } b \text{ Subtr.}$$

$$2x = a - b$$

$$\text{————— } 2 \text{ div.}$$

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

Ergo

Ergo quantitas major $= b + x = b + \frac{1}{2}a$
 $-\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Theorema; Si a semisumma duarum quantitatium subtrahatur, semidifferentia relinquitur
 quantitas minor si vero illi hæc addatur,
 prodit major.

PROBLEMA XXI.

361. *Datis summa duarum quantitatium & earundem factio, invenire numeros.*

Sit summa $= a$ Semidiffer. $= x$ Fact. $= b$
 erit Quant. maj. $= \frac{1}{2}a + x$ min. $= \frac{1}{2}a - x$
 (§. 284. 360).

Ergo per conditionem probl. (§. 310.).

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$

$xx \quad xx \quad \text{add.}$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$b \quad b \quad \text{Subtr.}$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)} = x$$

Regula I. A quadrato semisummæ duarum quantitatium subtrahatur factum earundem. 2. Ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem. Sit e. gr. $a = 14$, $b = 48$: erit $\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Adeoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$. $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt adeo numeri quæsi 8 & 6. Nam $8.6 = 48$ & $8 + 6 = 14$.

PROBLEMA XXII.

362. *Data summa dignitatum similium
duarum quantitatum & differentia ea-
rundem invenire quantitatem utramque.*

Sit summa = a Quant. maj. = y
differentia = b min. = x
erit per conditionem probl.

$$\begin{array}{r} x^m + y^m = a \\ x^m \quad \quad \quad x^m \\ \hline y^m = a - x^m \end{array} \quad \begin{array}{r} y^m - x^m = b \\ x^m \quad \quad \quad x^m \\ \hline y^m = b + x^m \end{array}$$

Quare (§. 65.)

$$\begin{array}{r} a - x^m = b + x^m \\ x^m \quad \quad \quad x^m \\ \hline a = b + 2x^m \\ b \quad b \\ \hline a - b = 2x^m \\ \hline (a - b) : 2 = x^m \end{array} \quad (2)$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)} = x$$

Sit $m=2$, $a=97$, $b=65$: erit $x = \sqrt{48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ & hinc $y = \sqrt{b + x^2} = \sqrt{65 + 16} = \sqrt{81} = 9$.
Examen: $x^2 + y^2 = 16 + 81 = 97$ & $y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$

Æquatio antepenultima resolvitur in hanc analogiam,

$a - b : x^m = 2 : 1$ (§. 212.), quæ sequens suppeditat.

THEO-

ea-
que.

0000-0001-9111-1111

$$y^2$$

in
fe.

Q-

$$y^2$$

in
fe.

Q-

Q-

Q-

Q-

Q-

secundi 8; via primi est 6. $16 = 96$,
secundi 8. $12 = 96$.

Aequatio penultima in hanc analogiam resolvitur (§. 212.).

$$b - a : a = c : x$$

quæ sequens suppeditat.

Theorema: Si quidam viator alterum insequitur, tempore aliquo elapso, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, est ad viam primi, quem alter insequitur, ut tempus ab itinere primi usque ad initium itineris secundi elapsum ad tempus, quo alter ipsum assequitur.

SCHOLIUM

364. Facile apparet, cum viatoris notio problematis resolutionem non ingrediatur, problema universalius de mobilibus quibuscunque concipi posse.

PROBLEMA XXIV.

365. Dato itinere diurno alicujus viatoris una cum tempore ab initio itineris elapso, invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum assequatur.

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapsum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$

Erit.

Erit per conditionem problematis ut in probl. præced.

$$\frac{ab + ac = cx.}{(ab + ac) : c = x}$$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$; erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam (§. 212.)

$$c : b + c = a : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso, erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

PROBLEMA XXV.

366. Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet, invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent.

Sit intervallum locorum $= a$

iter diurnum primi $= b$

secundi $= c$

tempus occurfus $= x$

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via, quam alter eodem tempore emittitur $= cx$ (§. 215). Quare cum

ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum, unde egrediebantur; habebimus

$$\begin{array}{r} bx + cx = a \\ \hline x = a : (b + c) \end{array}$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$; erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

PROBLEMA XXVI.

367. *Data summa duarum quantitatum & differentia quadratorum, invenire quantitates.*

Sit summa $= a$
differentia Quadr. $= b$
Semidiff. Quant. $= y$
erit Quant. maj. $= \frac{1}{2}a + y$.

minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 284. 360.).

Quare

Quadratum maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

min. $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Differ. (§. 304.) $2ay = b$ per condit.

$2a$ ————— probl.

$$y = b : 2a$$

Sit $b = 40$, $a = 10$; erit $y = 40 : 20 = 2$.
Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 - 9 = 40$ & $7 + 3 = 10$.

PROBLEMA XXVII.

368. *Dota summa duarum quantita-
tum una cum summa quadratorum, in
venire quantitatem utramque.*

$$\text{Sit summa} = a$$

$$\text{Summa Quadr.} = b$$

$$\text{Semidiff. Quant.} = y$$

$$\text{erit major} = \frac{1}{2}a + y \quad \left\{ \begin{array}{l} (\S. 284. 360.) \end{array} \right.$$

$$\text{minor} = \frac{1}{2}a - y$$

Quare

$$\text{Quadrat. maj. } \frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$$

$$\text{min. } \frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$$

$$\text{Summa } \frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$$

$$\frac{1}{2}a^2 \quad \quad \frac{1}{2}a^2 \text{ Subtr.}$$

$$2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2$$

$$\text{2 div.}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2\right)}$$

Sit $a=10$, $b=58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7 + 3 = 10$ & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA XXVIII.

369. *Invenire duos numeros ejus con-
ditionis, ut factum ex unoquoque in ra-
dicem quadratam alterius sit æquale nu-
mero dato.*

Sit

Sit factum unum $= a$ alterum $= b$ numerus unus $= x$ alter $= y$

erit per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} x \sqrt{y} = a \\ \hline x^2 y = a^2 \\ \hline y \end{array} \quad \begin{array}{r} y \sqrt{x} = b \\ \hline y^2 x = b^2 \\ \hline y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 = a^2 : y \\ \hline x = b^2 : y^2 \\ \hline x^2 = b^4 : y^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 : y = b^4 : y^4 \\ \hline y^4 \text{ mult.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 y^3 = b^4 \\ \hline a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y^3 = b^4 : a^2 \\ \hline \end{array}$$

$$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$$

Sit $a=18$, $b=12$; erit $y = \sqrt[3]{}$

$(20736 : 324) = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9 \sqrt{4} = 2 \cdot 9 = 18$ & $4 \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$.

PROBLEMA XXIX.

370. Dato pretio unius mensuræ vini, invenire quantitatem aquæ commiscendæ, ut una mensura dato alio pretio minore vendi queat.

Sit

Sit pretium majus $= a$.

minus $= b$

quantitas aquæ $= x$

Cum aquæ pretium nullum sit; erit

$1 + x : 1 = a : b$ consequenter

$$\frac{b + bx = a (\S. 210.)}{bx = a - b.}$$

$$\frac{bx = a - b.}{x = (a - b) : b = a : b - 1.}$$

Sit $a = 16$, $b = 10$; erit $x = 1\frac{6}{8} - 1 = 1\frac{6}{8} = \frac{3}{2}$.

Theorema: Si vino pretiosiori aqua commiscenda, ut viliori pretio constet; quantitas aquæ commiscendæ est ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x : 1 = a - b : b$

Examen. Etenim si integra mensura veneat 10 grossis, tres ipsius quintæ veneunt 6 grossis (§. 215.), quos si addas pretio unius mensuræ, quod est 10 grossorum: prodibunt 16 grossi pretium unius mensuræ vini generosioris.

PROBLEMA XXX.

371. Dato pretio vini generosi & pretio vilioris, determinare quantitatem vini vilioris generoso commiscendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.

Sit

Sit pretium unius mensuræ vini

generosi $= a$

vilioris $= b$

medium $= c$

quantitas unius mensuræ $= 1$.

quantitas vilioris vini

commiscendi $= x$;

erit pretium ejus $= bx$.

quantitas generosi

commiscendi $= 1 - x$;

erit ejus pretium $= a - ax$.

Quare per conditionem
problematis

$$a - ax + bx = c$$

$$\frac{ax}{ax} \quad ax \text{ add. ob } ax > bx$$

$$\frac{a + bx = c + ax}{bx \quad bx}$$

$$\frac{a = c + ax - bx}{c \quad c}$$

$$\frac{a - c = ax - bx}{-a - b}$$

$$(a - c) : (a - b) = x$$

Sit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; erit $x = (16 - 12) :$

$(16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $= 6\frac{2}{3}$, generosi
 $= 5\frac{1}{3}$, adeoque mensuræ mixti $= 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3}$
 $= 12$.

PROBLEMA XXXI.

372. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, summa & differentia quadratorum sint inter se æqualia.

Sit

Sit numerus major $= x$, minor $= y$;
erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \quad x + y = xy$$

$$\begin{array}{r} y \quad y \\ \hline x = xy - y \\ \hline \quad \quad x - 1 \end{array}$$

$$x : (x - 1) = y$$

Quodsi valor ipsius y jam inventus substituatur in æquatione sinistiore habebimus

$$\begin{array}{r} x^2 \qquad \qquad x^2 \\ x^2 - \frac{\quad}{x^2 - 2x + 1} \qquad = \frac{\quad}{x - 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \qquad \qquad x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2 \\ \hline x^3 \quad x^3 \quad \text{subtr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 = -x^2 \\ \hline \quad \quad \quad x^2 \text{ div.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x = -1 \\ \hline \frac{2}{4} \qquad \frac{2}{4} \quad (\S. 358.). \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + \frac{2}{4} = \frac{2}{4} - 1 = \frac{5}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$\frac{3}{2} - x =$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

Est vero $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$ radix vera; sed
 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$ non est numerus minor y ,
quia, si numerus minor diceretur y , ad
aliam æquationem deveniretur, quemad-
modum

modum apparet, si valore ipsius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 + y^2 = xy$ substituto, reductio legitime instituitur. Tunc enim reperitur $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$, ubi $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$ est radix falsa, quia $\frac{1}{2} \sqrt{5} > \frac{1}{2}$.

Examen. Est enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$,
 $xy = 2 + \sqrt{5}$ & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA XXXII.

373. *Datis in progressionē arithmetica termino primo & ultimo atque differentia terminorum, invenire numerum terminorum & summam progressionis.*

Sit terminus primus $= a$
 ultimus $= b$
 differentia $= d$
 numerus terminorum $= x$
 Summa $= y$

erit (§. 244. 332.)

$$\begin{array}{rcl} b & = & a + dx - d \\ d & & d \end{array} \quad y = \frac{1}{2} (b + a)x$$

$$\begin{array}{rcl} b + d & = & a + dx \\ a & & a \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} b + d - a & = & dx \\ (b + d - a) : d & = & x \end{array}$$

Quodsi hic valor in æquatione dextra substituitur, habebimus

$$y = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} (b+a)(b+d-a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \frac{1}{2} (b+a) + (b^2 - a^2) : 2d.$$

Sit $a=2$, $b=17$, $d=3$; erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$ & $y = \frac{1}{2} (17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57.$

PROBLEMA XXXIII.

374. *Datis termino primo, differentia terminorum & summa progressionis arithmeticae, invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

$$\begin{aligned} \text{Sit terminus primus} &= a \\ \text{differentia} &= d \\ \text{Summa} &= c \\ \text{ultimus} &= y \\ \text{terminorum numerus} &= x \end{aligned}$$

erit (§. 244. 332.).

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} x (a + y) & = & c \quad a + dx - d = y \\ \hline & & 2 \\ ax + xy & = & 2c \\ ax & & ax \text{ subtr.} \\ \hline xy & = & 2c - ax \\ \hline y & = & (2c - ax) : x \end{array}$$

Ergo (§. 65.)

$$(2c - ax) : x = a + dx - d.$$

$$\frac{2c - ax}{ax} = \frac{ax + dx^2 - dx}{ax} x$$

$$\frac{2c - dx^2 + 2ax - dx}{d} = d$$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a - d}{d} x$$

hoc est, si fiat $(2a - d) : d = m$

$$2c : d = x^2 + mx$$

$$\frac{1}{4} m^2 \quad \frac{1}{4} m^2$$

$$\frac{1}{4} m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \frac{1}{4} m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} m^2 + 2c : d\right)} = x + \frac{1}{2} m$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} m^2 + 2c : d\right)} - \frac{1}{2} m = x$$

Sit $a = 2, d = 3, c = 57$; erit $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$, consequenter $x = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdot 6}{8}} - \frac{1}{6} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA XXXIV.

375. Datis termino primo & ultimo una cum summa progressionis arithmeticae invenire numerum & differentiam terminorum.

Sit

Sit terminus primus $= a$
 ultimus $= b$
 Summa $= c$
 differentia $= y$
 numerus terminorum $= x$;
 erit (§. 244. 332.)

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x(a+b) & = & c \\ \hline x(a+b) & = & 2c \\ \hline x & = & 2c : (a+b) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a+xy-y & = & b \\ \hline xy-y & = & b-a \\ \hline y & = & b-a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x-1 & = & \frac{2c}{a+b} - 1 \\ \hline = 2c - a - b & & \frac{x-1}{a+b} = \frac{(b+a)(b-a)}{2c-a-b} \end{array}$$

Sit $a=2$, $b=17$, $c=57$; erit $x=114$:
 $19=6$ & $y=(1. 15): (114-19) = 285$:
 $95=3$.

Cum fit $y = (b+a)(b-a)$

$\frac{2c-a-b}{b-a} = \frac{(b+a)(b-a)}{b-a}$
 æquatio hæc resolvitur in analogiam
 $2c-a-b : b-a = b+a : y$

quæ sequens suppeditat

Theorema. In progressionē arithmetica est ut differentia summæ ex termino primo & ultimo a duplo summæ progressionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita summa termini primi & ultimi ad differentiam progressionalem.

PROBLEMA XXXV.

376. *Datis differentia & numero terminorum una cum summa progressionis arithmetice, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
 differentia $= d$
 Summa $= c$
 term. I $= x$
 ultimus $= y$;

erit (§. 244. 332.)

$$\frac{1}{2} nx + \frac{1}{2} ny = c \quad x + nd - d = y$$

$$\text{h. e. } nx + \frac{1}{2} n^2 d - \frac{1}{2} nd = c$$

$$\frac{1}{2} n$$

$$2x + nd - d = 2c : n$$

$$2x = 2c : n - nd + d$$

$$2$$

$$x = c : n - \frac{1}{2} nd + \frac{1}{2} d$$

Sit $n=6$, $d=3$, $c=57$; erit $x=9\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$
 $-9=2$ & $y=2+18-3=17$.

Pro-

PROBLEMA XXXVI.

377. *Datis differentia terminorum, termino ultimo & summa progressionis arithmeticae, invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$

Summa $= c$

terminus primus $= x$

numerus termin. $= y$;

erit (§. 244. 332.)

$$\frac{1}{2}y(x+b)=c \quad b=x+dy-d$$

$$\frac{y(b+x)=2c}{-2} \quad \frac{b+d-x=dy}{-}$$

$$y=2c:(b+x) \quad (b+d-x):d=y$$

Quamobrem (§. 65.)

$$\frac{2c:(b+x)=(b+d-x):d}{-d}$$

$$\frac{2cd:(b+x)=b+d-x}{-b+x}$$

$$2cd=b^2+bd-bx+bx+dx-x^2$$

$$x^2-dx=b^2+bd-2cd$$

$$\frac{\frac{1}{4}d^2}{\frac{1}{4}d^2} \quad (\S. 358.)$$

$$\frac{x^2-dx+\frac{1}{4}d^2=\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd}{-}$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}d=\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}}{\frac{1}{2}d-x=}$$

$$\frac{x=\frac{1}{2}d+\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}}{-}$$

Quodsi $\frac{1}{2}d > x$; erit $\frac{1}{2}d - x$ quantitas positiva, adeoque $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$: Si vero $\frac{1}{2}d < x$ quantitas $\frac{1}{2}d - x$ æquivalet privativo; sed $x - \frac{1}{2}d =$ positivo, adeoque $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$.

Sit $b=17$, $d=3$, $c=57$; erit $x = \frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 289 + 51 - 342)} = \frac{3}{2} + \sqrt{(2\frac{1}{4} - 2)} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$, & $y = (17 + 3 - 2) : 3 = \frac{18}{3} = 6$.

PROBLEMA XXXVII.

378. *Datis summa progressionis arithmetica, numero terminorum & facto ex primo in ultimum, invenire terminos singulos.*

Sit factum $= a$
 numerus terminorum $= n$
 Summa $= c$
 terminus 1 $= x$
 ultimus $= y$
 erit (§. 332. & per condit. probl.)

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}n(x+y) & = & c \\ \hline x+y & = & 2c:n \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} xy & = & a \\ \hline & & x \\ y & = & a:x \end{array}$$

h. e.

h. e. $x + a = 2c$

$$\frac{x}{n} \quad \frac{n}{n}$$

$$x^2 + a = 2cx$$

$$n$$

$$\frac{x^2 - 2cx : n = -a}{c^2 : n^2 \quad c^2 : n^2}$$

$$\frac{x^2 - 2cx : n + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a}{x - c : n = \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}}$$

$$c : n - x =$$

$$\frac{x = c + \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}}{n}$$

Signum + valet pro termino ultimo;
signum autem — pro primo.

Sit $c=57$, $n=6$, $a=34$; erit x
 $= \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{(3249 - 34)}{36}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{90\frac{1}{4}}$
 $- 34) = 9\frac{1}{2} - \sqrt{56\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{225} =$
 $9\frac{1}{2} + \frac{15}{2} = 17 \text{ \& } y = 9\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2} = 2$

PROBLEMA XXXVIII.

379. Invenire tres numeros continue
proportionales, dato facto ex quadrato
tertii in primum una cum denomina-
tore rationis.

$$\begin{aligned}
 \text{Sit factum} &= a \\
 \text{denominator} &= m \\
 \text{terminus primus} &= x \\
 \text{erit secundus} &= mx \\
 \text{tertius} &= m^2 x \} (\S. 339.)
 \end{aligned}$$

Quare per conditionem problematis

$$\begin{aligned}
 a &= m^4 x^3 \\
 \hline
 a : m^4 &= x^3 \\
 \hline
 \sqrt[3]{a : m^4} &= x
 \end{aligned}$$

Sit e. gr. $a=648$, $m=3$; erit $x=\sqrt[3]{648:81}=\sqrt[3]{8}=2$

Æquatio prima in hanc resolvitur analogiam: $1:m^4=x^3:a$ (§. 212.) Quare cum $1:m^4$ sit ratio quadruplicata $1:m$ (§. 116.); sequens nascitur.

Theorema. Cubus termini primi in proportionem geometricam continua est ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad secundum.

PROBLEMA XXXIX.

380. Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.

Sit

Sit numerus datus $= a$
 denominator $= b$
 pars prima $= x$;
 erit secunda $= bx$
 tertia $= b^2x$ (§. 339.).

& per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} b^2x + bx + x = a \\ \hline b^2 + b + 1 \\ x = a : (b^2 + b + 1) \end{array}$$

Sit $b = 4$, $a = 42$; erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$

PROBLEMA XL.

381. Numerum datum in terminos quotcunque proportionales resolvere, dato denominatore rationis.

Sit numerus datus $= a$
 denominator $= m$
 terminus I $= x$;
 erit secundus $= mx$
 tertius $= m^2x$
 quartus $= m^3x$ &c.

Ergo per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} x + mx + m^2x + m^3x + m^4x \text{ \&c.} = a \\ \hline x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4 \text{ \&c.}) \end{array}$$

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini sint numero sex; erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1. 3. 9. 27. 81. 243 est series proportionalium quaesita.

PROBLEMA XLI.

382. *Inter duos numeros datos invenire quoscunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

Sit primus datorum $= a$

ultimus $= b$

mediorum primus $= x$

numerus mediorum $= m$

erit per conditionem problematis (§. 215. 339. 343.)

$$a \cdot x \cdot \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2} \cdot \frac{x^4}{a^3} \text{ \&c. } \frac{x^m}{a^{m-1}} \cdot b$$

consequenter (§. 342.)

$$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$$

$$\frac{x^{m+1}}{a^{m-1}} = \frac{ab}{a^{m-1}}$$

$$x = \sqrt[m+1]{a^m b}$$

Sit $a=1$, $b=243$, $m=4$; erit $m+1$

$=5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$, consequenter termini intermedii sunt 3. 9. 27. 81.

PROBLEMA XLII.

383. *Data summa termini primi & ultimi, itemque summa secundi & tertii in proportionem sive continua, sive discreta,*

CAP. IV. DE ALG. AD PROB. ARITH. 203

ta, una cum denominatore rationis,
invenire terminos singulos.

Sit summa $I = a$

$II = b$

denominator $= m$

terminus primus $= x$

erit quartus $= a - x$

secundus $= mx$

tertius $= b - mx$

Quare per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} x : mx = b - mx : a - x \\ \hline \text{Hinc } ax - x^2 = mbx - m^2 x^2 \\ \hline - x \\ \hline a - x = mb - m^2 x \\ \hline m^2 x - x = mb - a \\ \hline - m^2 - 1 \\ \hline x = \frac{mb - a}{m^2 - 1} \end{array}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$; erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

PROBLEMA LXIII.

384. Datis in progressionem geometricam termino primo & ultimo atque terminorum numero, invenire denominatorem rationis.

Sit terminus primus $= a$

ultimus $= b$

numerus terminorum $= n$

denominator $= x$

Erit (§. 345.)

$b = x^n$

$$\begin{array}{r} b = x^{n-1} a \\ \hline b : a = x^{n-1} \\ \hline b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x \end{array}$$

Sit $a=2$, $b=486$, $n=6$; erit $x = \sqrt[5]{}$

$$(486:2) = \sqrt[5]{243} = 3$$

PROBLEMA XLIV.

385. *Datis denominatore rationis, terminorum numero & summa progressionis geometricæ, invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
 numerus terminorum $= n$
 summa progress. $= c$
 terminus I $= x$;
 erit ultimus $= m^{n-1} x$
 consequent. (§. 345.)

$$\begin{array}{r} c = (m^n x - x) : (m - 1) \\ \hline mc - c = m^n x - x \\ \hline (mc - c) : (m^n - 1) = x \end{array}$$

Sit $m=3$, $n=6$, $c=728$; erit $x = 2$.
 $2 \cdot 728 : 728 = 2$.

Analogia, in quam æquatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, supeditat hoc

Theorema : Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis est, unitate mulctata ad denominatorem ipsum unitate imminutum.

PROBLEMA XLV.

386. *Datis in progressionē geometricā termino primo & ultimo una cum denominatore rationis, invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$

denominator rationis $= m$

numerus terminorum $= x$;

erit (§. 345.)

$m^{x-1} a = b$, hoc est, si logarithmus ipsius a ponatur la & logarithmus ipsius $m = lm$.

$$xlm - lm + la = lb \quad (§. 252. 248.)$$

$$xlm = lb - la + lm$$

$$\text{—————} lm$$

$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$; erit

$$lb = 2.6866363$$

$$la = 0.3010300$$

$$lb - la = 2.3856063$$

$$2 \times 1$$

$$lb - la = 2.3856063 \quad \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right)$$

$$lm = 4772223$$

$$6 = x$$

PRO-

PROBLEMA XLVI.

387. *Datis summa progressionis geometricæ, termino primo atque ultimo, invenire numerum terminorum, ac denominatorem rationis.*

Sit summa $= c$
 terminus primus $= a$
 ultimus $= b$
 denominator rationis $= y$
 numerus terminorum $= x$
 erit (§. 345.)

$$\begin{array}{rcl} c & = & (by - a) : (y - 1) \quad b = y^{x-1} a \\ \hline cy - c & = & by - a \\ \hline cy - by & = & c - a \\ \hline & & c - b \\ \hline y & = & (c - a) : (c - b) \end{array}$$

Æquatio altera adhibitis logarithmis insequentem degenerat (§. 252. 248.

$$\begin{array}{rcl} lb & = & xly - ly + la \\ \hline lb + ly - la & = & xly \\ \hline & & ly \\ \hline (lb - la) : ly + 1 & = & x \end{array}$$

Quodsi substituatür valor ipsius ly paulo ante inventus, qui est,

$$\frac{l(c-a) - l(c-b)}{lb - la}; \text{ habebimus.}$$

$$\frac{l(c-a) - l(c-b)}{lb - la} + 1 = x$$

Sit $c=728$, $a=2$, $b=486$; erit

lb

$$\begin{array}{ll} lb = 2.6866363 & c = 728 \\ la = 0.3010300 & b = 486 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} lb - la = 2.3856063 & c - b = 242 \\ l(c - a) = 2.8609366 & c = 728 \\ l(c - b) = 2.383814 & a = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Diff.} & = & 4\ 771212 \\ & & 2.3\ 856063 \\ & & 4\ 771212 \\ \hline & & 6 = x \end{array} \quad \begin{array}{l} c - a = 726 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

PROBLEMA XLVII.

388. *Datis in progressionē geometricā factō ex primo in ultimum, numero terminorum & denominatore rationis, invenire terminum primum & ultimum.*

$$\begin{array}{l} \text{Sit factum} = f \\ \text{numer. termin.} = n \\ \text{denominator} = m \\ \text{terminus primus} = x \\ \text{ultimus} = y \end{array}$$

erit per conditiones problematis & (§. 345.)

$$xy = f \quad m^{n-1} x = y$$

$$\frac{xy = f}{y = f : x}$$

Quare (§. 65.)

$$f : x = m^{n-1} x$$

$$\frac{f : x = m^{n-1} x}{f = m^{n-1} x^2}$$

$$f : m^{n-1} = x^2$$

$$\sqrt{f : m^{n-1}} = x$$

Sit

Sit $m=3$, $n=6$, $f=972$; erit $\sqrt{972}$:
 $\sqrt{243}=\sqrt{4}=2$.

DEFINITIO XIII.

389. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *harmonice proportionales*: si in priore casu differentia primi & secundi fuerit ad differentiam secundi atque tertii, ut primus ad tertium; in casu posteriore differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum: E. gr. 10, 16 & 40 sunt in proportionem harmonicam: est enim $6:24=10:40$. Si termini proportionales in casu priore continentur; oritur *Progressio harmonica*.

PROBLEMA XLVIII.

390. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $=a$

secunda $=b$

tertia $=x$

erit (§. 389.)

$$b-a:x-b=a:x$$

$$ax-ab=bx-ax \quad (§. 210.)$$

$$2ax-bx=ab$$

$$x=ab:(2a-b)$$

E. gr. Sit $a=10$, $b=16$; erit $x=160$:
 $(20-16)=160:4=40$.

Æqua-

Aequatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$ unde sequens enascitur

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales; erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

391. Si $2a = b$; erit $x = ab : a$, consequenter $1 : 0 = x : ab$ (§. 123.). Quare cum non sit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. E. gr. Si $a = 12$, $b = 24$; juxta regulam $x = 12 \cdot 24 : (24 - 12) = 12 \cdot 24 : 12 = 24$. Sed non licet $12 \cdot 24$ seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12 : 264 = 12 : 288$ (§. 389.): Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b > 2a$.

COROLLARIUM II.

392. Quodsi ex tribus proportionalibus 6. 8. 12 terminus secundus sumatur pro a , tertius pro b , invenietur quartus continue proportionalis $= 8$. $12 : (16 - 12) = 8$. $12 : 4 = 8$. $3 = 24$.

COROLLARIUM III.

393. Cum eodem modo, si tertius pro a , quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 391.), conti-

Wolf. Mathes. O . . . nua.

210 ELEMENTA ANALYS. MATHEM.

nuatur per regulam inventam. E. gr. Si $a=10$, $12=b$; erit tertius $12. 10: (20-12)=15$. Inde quartus $12. 15: (24-15)=20$; quintus $15. 20: (30-20)=30$; sextus $20. 30: (40-30)$. Sed ulterius continuari nequit, ob $60=2. 30$ (§. 391.).

PROBLEMA XLIX.

394. *Datis duabus quantitativibus, invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $=a$
 secunda $=x$
 tertia $=b$

$$\begin{array}{l} \text{erit } x-a:b-x=a:b \text{ (§. 389)} \\ \hline bx-ab=ab-ax \text{ (§. 210.)} \\ \hline ax+bx=2ab \\ \hline =a+b \\ \hline x=2ab:(a+b) \end{array}$$

E. gr. Sit $a=10$, $b=40$; erit $x=800:50=16$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam: $a+b:2a=b:x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales; erit summa primi & ultimi ad primi duplum ut ultimus ad medium.

PROBLEMA L.

395. *Datis tribus quantitativibus, invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit

Sit prima $= a$
 secunda $= b$
 tertia $= c$
 quarta $= x$
 erit (§. 389.)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac \quad (\S. 210.)$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$ac : (2a - b) = x$$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$; erit $72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam:

$$2a - b : a = c : x$$

Theorema: Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales; erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO XIV.

396. *Proportio contraharmonica* est. ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum. E. gr. 3, 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales: est enim $2 : 1 = 6 : 3$.

PROBLEMA LI.

397. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
 secunda $= b$
 tertia $= x$
 erit (§. 396.)

$$\begin{array}{r} b-a : x-b = x : a \\ \hline ab - aa = x^2 - bx \quad (\S. 210.) \\ \frac{1}{4}b^2 \quad \frac{1}{4}b^2 \quad (\S. 358.) \\ \hline \frac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 \\ \hline \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2\right)} = x - \frac{1}{2}b \text{ ob } x > b \\ \hline \frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2\right)} = x \end{array}$$

E. gr. Sit $a=3$, $b=5$; erit $x = \frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{25}{4} + 15 - 9\right)} = \frac{5}{2} + \sqrt{16} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

PROBLEMA LH.

398. *Datis duabus quantitatibus, invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
 tertia $= b$
 erit (§. 396.)

$$\begin{array}{r} x-a : b-x = b : a \\ \hline ax - a^2 = b^2 - bx \quad (\S. 210.) \\ \hline ax + bx = a^2 + b^2 \\ \hline \quad \quad \quad a+b \\ \hline x = (a^2 + b^2) : (a+b) \end{array}$$

E. gr.

E. gr. Sit $a=3$, $b=6$; erit $x=(9+36):(3+6)=45:9=5$

Theorema: Si summa 2 quadratorum dividitur per summam radicum, quotus est inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO XV.

399. *Numerus pronicus* est, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem æqualis.

COROLLARIUM I.

400. Si in progressionē arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $=n$; erit summa progressionis $=2n+\frac{1}{2}(n^2-n)2$ (§. 333.), $=2n+n^2-n=n^2+n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

COROLLARIUM II.

401. Patet adeo numeros pronicos prodire per summationem progressionis numerorum parium. Sit enim

progressio 2. 4. 6. 8. 10 &c.
erunt pronicæ 2. 6. 12. 20. 30 &c.

PROBLEMA LHI.

402. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= a$, radix pronica $= x$

erit (§. 399.)

$$x^2 + x = a$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \quad (\S. 358.)$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} + x = \sqrt{a + \frac{1}{4}} = \sqrt{4a + 1}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4a + 1}$$

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{4a + 1} - \frac{1}{2}$$

Theorema. Si quadruplo numeri pronici addatur unitas & radix dimidio mulctata bifariam dividatur, quotus est radix pronica.

$$\text{Sit } a = 72; \text{ erit } x = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 72 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{289} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8.$$

$$\text{Examen. Nam } 64 + 8 = 72.$$

PROBLEMA LIV.

403. Invenire duos numeros, quorum summa una cum facto eorundem æquatur numero dato.

Sit numerus datus $= a$, quæsitur unus $= x$, alter $= y$; erit per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} xy+x+y=a \\ xy+x=a-y \\ \hline y+1 \\ x=(a-y):(y+1) \end{array}$$

Sit $a=30$, $y=2$; erit $x=(30-2):(2+1)=28:3=9\frac{1}{3}$. Sit $a=20$, $y=2$; erit $x=(20-2):(2+1)=18:3=6$. Sit $a=19$, $y=4$; erit $x=(19-4):(4+1)=15:5=3$.

SCHOLION

404. Istiusmodi Problemata, uti etiam sequentia, dicuntur indeterminata, quia variis modis solvi possunt.

PROBLEMA LV.

405. Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi æquetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.

Sit numerus primus $=x$, secundus $=y$; tertius $=z$, quartus $=t$, erit per condiciones problematis

$$\begin{array}{r} y+x=z \\ x=z-y \\ \hline x=t+y \end{array}$$

Quare (§. 65.)

$$\begin{array}{r} t+y=z-y \\ t+2y=z \\ \hline 2y=z-t \end{array}$$

$$y=(z-t):2$$

$$\text{Ergo } x=(z-t):2+t=(z+t):2.$$

O 4,

Unde

xy

Unde apparet, si numeri integri desiderentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum impari.

Sit $z=8, t=2$: erit $y=(8-2): 2=6$:
 $2=2$ & $x=(8+2): 2=4+1=5$. Simi-
 liter sit $z=5, t=1$: erit $x=(5+1): 2=3$
 & $y=(5-1): 2=2$.

PROBLEMA LVI.

406. *Invenire duos numeros, quorum summa æquatur quadrato minoris.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$:
 erit per conditionem problematis

$$\frac{x+y^2=y^2}{x=y^2-y=(y-1)y}$$

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate multiplicatum.

Sit $y=3$: erit $x=2. 3=6$.

Sit $y=5$: erit $x=4. 5=20$. Sit $y=9$:
 erit $x=8. 9=72$.

PROBLEMA LVII.

407. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum æquetur cubo minoris.*

Sit

Sit numerus major $= x$, minor $= y$;
erit per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = y^3 \\ \hline x^2 = y^3 - y^2 = y^2 (y - 1) \\ \hline x = y \sqrt{y - 1} \end{array}$$

Apparet adeo, pro y assumendum esse numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc est, quadratum quodlibet unitate auctum.

E. gr. Sit $y = 5$; erit $x = 5 \sqrt{5 - 1} = 5 \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$. Sit $y = 17$, erit $x = 17 \sqrt{17 - 1} = 17 \sqrt{16} = 17 \cdot 4 = 68$.

PROBLEMA LVIII.

408. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $y + x$, differentia quadratorum $= d$: erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, consequenter per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} 2xy + y^2 = d \\ \hline 2xy = d - y^2 \\ \hline = y^2 \\ \hline x = (d - y^2) : 2y \end{array}$$

Unde apparet, pro y assumi debere numerum, qui sit minor quam Vd .

Sit e. g. $d=10$, $y=3$; erit $x=(10-9):6=\frac{1}{2}$ & $x+y=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$. Sit $d=11$, $y=1$: erit $x=(11-1):2=10:2=5$ & $x+y=5+1=6$. Sit $d=48$, $y=4$: erit $x=(48-16):8=6-2=4$ & $x+y=4+4=8$.

PROBLEMA LIX.

409. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipsorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$, ratio data $=a:b$; erit per conditionem problematis

$$\begin{array}{r} x-y: x^2-y^2=a:b \\ \text{h. e. 1: } x+y=a:b \text{ (§. 348.)} \\ \hline ax+ay=b \\ \hline -a \\ \hline x+y=b:a \\ \hline x=b:a-y \end{array}$$

Sit $b: a=9$, $y=4$; erit $x=5$. Vel sit $=3$; erit $x=6$.

PROBLEMA LX.

410. *Invenire numerum, qui si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $= a$, alter $= b$,
quæsitus $= x$: erit per conditiones problematis

$$\begin{array}{rcl} ax = y^2 & & bx = v^2 \\ \hline x = y^2 : a & & x = v^2 : b \\ y^2 : a = v^2 : b & & \\ \hline y^2 = av^2 : b & & \\ y = v \sqrt{a : b} & & \end{array}$$

Quodsi ergo numerus rationalis desideretur, $a : b$ quadratus esse debet.

Sit $a = 32$, $b = 8$; erit $V(a : b) = 2$. Sit porro $v = 5$, erit $y = 10$, consequenter $x = \frac{25}{2}$.

PROBLEMA LXI.

411. *Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.*

Sint

Sint numeri quadrati quæſiti x^2 & y^2 ; latus quadrati, cui isti junctim sumti æquantur $\nu x - y$: erit

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = \nu^2 x^2 - 2\nu xy + y^2 \\ \hline x^2 = \nu^2 x^2 - 2\nu xy \\ \hline x = \nu^2 x - 2\nu y \\ \hline 2\nu y = \nu^2 x - x \\ \hline 2\nu y : (\nu^2 - 1) = x \end{array}$$

Sit $\nu = 2$, $y = 3$: erit $x = 12$: $(4 - 1)$
 $= 12 : 3 = 4$





ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ
PLANÆ EXHIBET.

CAPUT I.

DE

PRINCIPIIS GEOMETRIÆ.

DEFINITIO I.

Geometria est scientia extensorum,
quatenus terminata sunt, hoc est,
Linearum superficierum & solidorum.

DEFINITIO II.

2. *Congruere* dicuntur, quorum iidem
termini esse possunt. Nempe *Congruen-*
tia est coincidentia terminorum.

DE.

DEFINITIO III.

3. *Punctum* est, quod quaquaversum seipsum terminat, seu, quod non habet terminos alios a se distinctos.

COROLLARIUM I.

4. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 2.)

COROLLARIUM II.

5. Nec ullas in eo distinguere licet partes.

SCHOLIUM.

6. Hinc Euclides : *Punctum* est, inquit, *cujus pars nulla est. Nec sine ratione punctum ut individuum concipiunt Geometra, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipsa Geometrica summo cum studio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus existit.*

DEFINITIO IV.

Tab. I.
Fig. I.

7. *Linea* describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

8. Termini igitur lineæ secundum longitudinem sunt puncta A & B; secundum latitudinem & profunditatem ipsa sui terminus est (§. 3.).

COROLLARIUM II.

9. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 5.), linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

DEFINITIO V.

10. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLIUM.

11. Ita e. gr. *distantia arboris a domo* est linea brevissima, quæ ab illa ad hanc duci potest.

DEFINITIO VI.

12. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcunque est toti similis.

Tab. I.
Fig. I.

COROLLARIUM.

13. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 7.); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim diversitate hujus motus partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 19. *Arithm.*) contra definitionem (§. 12.). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate ac directione, celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio, consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur. Lineæ
igi-

igitur rectæ non differunt nisi quantitate.
(§. 21. *Arithm.*)

Tab. I.

Lig. I.

POSTULATUM I.

14. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.*

POSTULATUM II.

15. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO VII.

16. *Linea curva est, cujus partes toti dissimiles.*

DEFINITIO VIII.

17. *Metiri idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, Mensura dicitur.*

DEFINITIO IX.

18. *Hinc Mensura linearum est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui Pedes vocantur: unde ipsa Decempeda appellatur. Pes subdividitur in 10 Digittos; digitus in 10 Lineas & ita porro.*

SCHOLIION I.

19. *Celebrium mensurarum varietates representat tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium per Regius Parisinus est 1440. Continet is nempe 12 digitos, digitus 12 lineolas, lineola 10 particulas, adeoque pes integer particulas 1440.*

Pes Regius		Constanti-	
Parisinus	1440	nopolitanus	3120
Rhenanus	$1391\frac{3}{16}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{3}$
Romanus	1320	Argentorat.	$1282\frac{3}{4}$
Londin.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{1}{2}$	Halensis	1320
Venetus	1540	Vindobon.	1402

SCHOLIION II.

20. *Stevinus indicem decempedarum constituit 0, pedum 1, digitorum 2, linearum 3 &c. tanquam denominatorum logarithmos (§. 272. Arithm.), quos circello inclusor numeris adscribit. Sed commodius Johannes Bayerus in Logistica decimali & Stereometria logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. E. gr. Tres perticae, quinque pedes, septem digiti & octo lineae ita scribuntur: 3° 5' 7" 8". Commodissimum saepe accidit, si numeri integra sive decempedas designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis lineis &c. puncto separentur, ut monuimus in Arithmetica (§. 219.). Ita loco 3° 5' 7" 8" scribemus 3.578.*

Wolf. Mathef.

P

DE.

DEFINITIO X.

21. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

22. Terminum secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ, secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.

DEFINITIO XI.

23. Per *perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XII.

24. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

25. Dicitur tam de superficies, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt lineæ; in posteriori superficies.

DEFINITIO XIII.

26. *Figura rectilinea* est, cujus perimenter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimenter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimenter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

DEFINITIO XIV.

27. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DE-

DEFINITIO XV.

28. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVI.

29. *Circulus* est figura plana, linea in Tab. I. se redeunte terminata, ex cujus singu- Fig. 2. lis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO XVII.

30. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XVIII.

31. *Diameter* AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

32. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§. 29.).

DEFINITIO XIX.

33. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AB: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet

gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur.

COROLLARIUM.

34. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLIUM

35. *Scrupula* graduum sunt fractiones sexagesimales & apicibus suis notantur. Gradui tanquam integro seu unitati cessit 0, minuto primo 1, secundo 2, tertio 3 &c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis (§. 20.). E. gr. 3. gradus, 25 minuta, 16 secunda ita scribis: 3° 25' 16".

DEFINITIO XX.

36. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Eccentrici* vero, qui habent, diversa.

DEFINITIO XXI.

Tab. I. 37. *Segmentum circuli* est pars ipsius
Fig. 2. AFBA arcu AFB & chorda AB comprehensa. Dicitur *Segmentum majus*, quod semicirculo majus est; *minus* vero, quod minus est.

DEFINITIO XXII.

Tab. I. 38. *Sector circuli* est pars ejus ACD
Fig. 2. duobus radiis AC & CD atque arcu AD comprehensa.

DE-

DEFINITIO XXIII.

39. Recta HL circulum in L tangit, Tab. 1.
 si ipsi ita occurrit, ut producta tota ex- Fig. 3.
 tra circulum cadat.

COROLLARIUM.

40. Recta CL ex centro C ad contactum
 L ducta est radius circuli (§. 31.).

DEFINITIO XXIV.

41. Linea AB lineam CD secat in E, Tab. 1.
 si eam dirimit in partes CE & ED cis Fig. 4.
 & ultra ipsam sitas.

DEFINITIO XXV.

42. *Angulus* est duarum linearum AB Tab. 1.
 & AC in uno puncto A concurrentium Fig. 5.
 mutua inclinatio. Lineæ AB & AC di-
 cuntur *crura*; punctum concursus A *Ver-*
tex anguli.

SCHOLION.

43. *Angulus* hic vel unica littera *Vertici* ejus
 adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis con-
 fusionem tribus literis BAC indigitatur, ita, ut ver-
 tici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo
 imponit littera minor, veluti x, eidem inscripita. Uti-
 mur vero angulis ad linearum situm determinandum.

DEFINITIO XXVI.

44. *Angulus insilere* dicitur lineæ, in
 qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVII.

Tab. I. 45. *Mensura anguli* BAC est arcus DE
 Fig. 5: ex vertice A radio prorsus arbitrario AE
 intra crurâ ejus AC & AB descriptus.

COROLLARIUM.

46. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§. 33.) Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLION.

47. Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE (§. 33.)

DEFINITIO XXVIII.

Tab. I. 48. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt,
 Fig. 6. quorum idem est vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXIX.

Tab. I. 49. *Rectæ lineæ* AE & EB in directum
 Fig. 4. sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt.

DEFINITIO XXX.

Tab. I. 50. *Angulus deinceps positus* AEC
 Fig. 4. dicatur, qui oritur, anguli AED latere uno ED in C producto.

Co-

COROLLARIUM I.

51. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 49.).

COROLLARIUM II.

52. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui sed non contra (§. 48.).

DEFINITIO XXXI.

53. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est. Tab. I.
Fig. 4.

DEFINITIO XXXII.

54. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis, *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major. Tab. I.
Fig. 7.

DEFINITIO XXXIII.

55. *Anguli verticales* & x sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED. Tab. I.
Fig. 4.

DEFINITIO XXXIV.

56. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, x & y dicuntur *alterni*. Tab. I.
Fig. 8.

DEFINITIO XXXV.

57. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, u & y , item z & y , dicuntur *oppositi*: & quidem u dicitur *oppositus externus*, z vero *oppositus internus* ipsius y .

DEFINITIO XXXVI.

Tab. I. 58. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*.

COROLLARIUM.

59. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 30 & 42.) atque arcui AD insitit (§. 44.)

DEFINITIO XXXVII.

60. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

61. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 31.), adeoque arcui AD insitit (§. 44.), consequenter arcus AD ejus mensura (§. 45.).

DEFINITIO XXXVIII.

62. *Angulus extra centrum* HKI est, Tab. I.
cujus vertex K extra centrum est, cru- Fig. 10.
ra vero HK & IK in peripheria termi-
nantur.

COROLLARIUM.

63. Infistit ergo arcui HI (§. 33. 44).

DEFINITIO XXXIX.

64. *Angulus contactus* HLM est, quem Tab. I.
arcus circuli ML cum tangente HL ad Fig. 3.
contactum efficit.

DEFINITIO XL.

65. *Angulus segmenti* MLH vel MLK
est, quem chorda ML cum tangente HL
vel LK ad contactum L efficit.

DEFINITIO XLI.

66. *Linea* KL *perpendicularis* aut *nor-* Tab. I.
malis est ad alteram LM, si cum ea effi- Fig. 7.
cit rectum.

COROLLARIUM.

67. Si igitur LK ad NM perpendicularis;
anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 53.)
& contra.

DEFINITIO XLII.

68. *Linea* AB est ad alteram AC ob- Tab. I.
liqua, si cum ea efficit angulum obli- Fig. 5.
quum.

DEFINITIO XLIII.

69. *Linea* OP *parallela* est alteri QR, Tab. I.
si ubique eandem ab ea distantiam servat. Fig. 8.

COROLLARIUM.

70. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLIV.

Tab. I. 71. *Lineæ convergentes* TO & VQ
Fig. II. sunt, quarum distantia continuo fit minor.

DEFINITIO XLV.

72. *Lineæ divergentes* TN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO XLVI.

73. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata,

DEFINITIO XLVII.

Tab. I. 74. *Triangulum æquilaterum* ABC est,
Fig. 12. cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia.

DEFINITIO XLVIII.

Tab. I. 75. *Triangulum æquicrurum* five *Iso-*
Fig. 13. *sceles* DEF est, quod duo latera æqualia habet.

DEFINITIO XLIX.

Tab. I. 76. *Triangulum scalenum* ACB est,
Fig. 14. cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia.
DE.

DEFINITIO L.

77. *Triangulum rectangulum* KML est, Tab. I.
Fig. 15.
cujus angulus unus K rectus est:

DEFINITIO LI.

78. *Triangulum obtusangulum* PNO Tab. I.
Fig. 16.
est, cujus angulus unus N est obtusus.

DEFINITIO LII.

79. *Triangulum acutangulum* ACB est, Tab. I.
Fig. 12.
cujus singuli sunt acuti.

DEFINITIO LIII.

80. *Triangulum obliquangulum* est,
cujus singuli anguli sunt obliqui.

DEFINITIO LIV.

81. *Hypothenuſa* ML est latus in tri- Tab. I.
Fig. 15.
angulo rectangulo angulo recto K oppo-
ſitum.

DEFINITIO LV.

82. *Catheti* sunt latera trianguli re-
ctanguli MK & KL angulum rectum K in-
tercipientes.

DEFINITIO LVI.

83. *Figura quadrilatera* est, cujus
perimeter ex quatuor lateribus conſtat.
Rectangula dicitur, ſi anguli ejus ſinguli
fuerint recti; *obliquangula*, ſi obliqui.

DE-

DEFINITIO LVII.

Tab. I. 84. *Quadratum* ABDC est figura qua-
Fig. 17. drilatera, æquilatera, rectangula.

DEFINITIO LVIII.

Tab. I. 85. *Rhombus* EFHG est figura qua-
Fig. 19. drilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LIX.

Tab. I. 86. *Rectangulum* five *oblongum* MLKI
Fig. 18. est figura quadrilatera, rectangula, late-
ra opposita ML & IK item IM & LK
æqualia habens.

DEFINITIO LX.

Tab. I. 87. *Rhomboides* NOPQ est figura
Fig. 20. quadrilatera, obliquangula, latera oppo-
sita OP & NQ, item ON & PQ æqualia
habens.

DEFINITIO LXI.

88. *Parallelogramum* est figura qua-
drilatera, cujus latera opposita sunt pa-
rallela. (§. 69.)

DEFINITIO LXII.

Tab. II. 89. *Trapezium* RTVS est figura qua-
Fig. 21. drilatera non parallelogramma.

DEFINITIO LXIII.

Tab. II. 90. *Figura poligona* seu *multilatera*
Fig. 22. ABCED vel FGHKI est, cujus perime-
23. ter

ter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quod si latera fuerint quinque *Pentagonum*; si sex *Hexagonum*; si septem *Heptagonum*; si octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO LXIV.

91. *Figura æquiangula* est, cuius singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXV.

92. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVI.

93. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVII.

94. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur, si singula latera unius fuerint singulatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXVIII.

95. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO LXIX.

96. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura seruent.

DEFINITIO LXX.

Tab. I. 97. *Diagonalis* PN est recta ex ver-
Fig. 20. tice anguli unius P in verticem alte-
rius N ducta.

DEFINITIO LXXI.

Tab. I. 98. *Basis* figuræ est perimetri pars ima
Fig. 15. KL.

COROLLARIUM.

99. Cum situs figuræ ipsi non sit essentia-
lis, quamlibet perimetri partem seu latus fi-
guræ quodlibet pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXXII.

Tab. I. 100. *Vertex* figuræ M est vertex angu-
Fig. 15. li basi KL oppositus.

DEFINITIO LXXIII.

101. *Altitudo* figuræ est distantia ver-
ticis a basi, siue perpendiculum ex ver-
tice in basin demissum. (§. 66.)

DEFINITIO LXXIV.

Tab. VI. 102. *Figura* ABCDE dicitur *circulo in-*
Fig. 84. *scripta*, si peripheria per vertices singu-
lorum

lorum angulorum ipsius transit: tuncque
Circulus figuræ dicitur *circumscriptus*.

DEFINITIO LXXV.

103. *Figura* abede dicitur *circulo* cir- Tab. VI.
cumscripta, si singula ejus latera peri- Fig. 84.
 pheriam tangant, tumque *circulus* figu-
 ræ dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO LXXVI.

104. *Mensura* figuræ est quadratum,
 cujus latus perticæ æquale, diciturque
pertica quadrata, & in pedes quadratos,
 sicut pes quadratus in digitos quadratos
 dividitur.

DEFINITIO LXVII.

105. *Eodem modo determinari* dicun-
 tur, si data, per quæ unum determi-
 natur, fuerint similia datis, per quæ
 determinatur alterum, seu utrobique ex
 datis similibus per easdem regulas reli-
 qua determinantur.

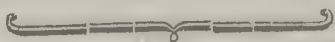
COROLLARIUM.

106. Quæ itaque eodem modo determinan-
 tur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni
 debent, adeoque similia sunt (§. 19. *Arithm.*



CAPUT II.

DE PROPOSITIONIBUS QUIBUS- DAM FUNDAMENTALIBUS.



PROBLEMA I.

107. *A dato puncto ad datum punctum lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam ad puncta data applicatam graphio, penna aut plumbagine.

II. In ligno vel saxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum creta vel cerussa delibutum punctis datis apprimatur & medio digitis prehenso sursum trahatur moxque iterum demittatur.

III. In campo

Recta designatur per baculos in punctis datis beneficio libellæ ad horizontem perpendiculariter defixos; quorum summitati muccinium aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

PROBLEMA II.

108. *Duobus baculis in solo defixis, tertium vel plures in eadem recta cum iis infigere.*

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in Opticis.

PROBLEMA III.

109. *Lineam rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Ad manus sit necesse est mensura (§. 17.) Tab. II. Fig. 24.
Nimirum pro lineis in charta datis abscindantur ex RT 10. partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10. pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 18.). In campo vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes & decempedas legitime divisus utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes & pedem ultimum in digitos dividi. Quodli ergo lineam rectam metiri jubearis.

I. In charta

1. Ponatur crus circini unum in A & eousque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.

Wolf. Mathes, Q 2 Mox

2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, e, gr. in 10. ponatur & notetur, quemnam pedem mensuræ alterum attingat, e, gr. 5. Erit linea AB 1^o5'.

II. In Campo

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 107.) &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituentur cum iis alii in eadem recta (§. 108.).
2. Funis cannabinus aut catena mensuram largiens ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 53.): quod perpendiculo appenso evidens redditur.
3. Decempedæ, pedes atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

PROBLEMA IV.

110. *Ex dato quovis centro, dato radio quocunque, circulum describere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Collocetur circini crus unum in centro dato & aperiatur intervallo radii dati.
 2. Moveatur circinus circa centrum: ita crus alterum peripheriam designabit (§. 29.).
- II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri, nequit, quanta requiritur,

ritur, radii vice fungitur filum, funi-
culus, aut virga five lignea, five
ferrea.

COROLLARIUM.

III. Quoniam unius circuli peripheria eo-
dem modo determinatur, quo periphe-
ria alterius cujuscunque (§. 105.); omnes
peripheriæ sunt inter se similes (§. 106.).
Eodem modo patet, omnes circulos & femi-
circulos esse inter se similes.

THEOREMA I.

III2. *Diameter AE dividit tam peri-* Tab. I.
pheriam, quam circumulum ipsum in duas Fig. 2.
partes æquales.

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, item-
que circuli ADECA & ABECA deter-
minantur, recta AC circa centrum C
mota, donec sibi in directum jaceat (§.
110.). Sunt adeo arcus ABE & ADE par-
tes peripheriæ, segmenta ABECA &
ADECA partes circuli eodem modo de-
terminatæ, adeoque similes (§. 106.).
Quamobrem illi ad peripheriam, hæc
ad circumulum eandem rationem habent
(§. 120. *Arithm.*), consequenter tum il-
li, tum hæc inter se æquantur (§. 126.
Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

113. Super quavis igitur linea AE ex assumpto in ea puncto C (producta, si opus sit, (§. 15)) describi potest semicirculus.

THEOREMA II.

Tab. II.
Fig. 25.

114. Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB ; tum arcus DE & BA ad peripherias, tum sectores DCE & ACB ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici per hypoth. idem centrum C habeant (§. 36.), & arcus AB atque DE , itemque sectores ACB & DCE describantur radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 110.); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (§. 105.), consequenter illi peripheriarum, hic circulorum partes similes sunt (§. 106.), adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 120. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

115. Cum arcus DE & AB intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti sint arcus circulorum concentricorum (§. 36.); ad suas quoque peripherias eandem ratio-

CAP. II. DE PROPOS. QUIB. FUND. 245

rationem habent (§. 114.), consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 122. *Arithm.*) Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 33.); ipsi quoque eundem continere debent.

COROLLARIUM II.

116. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§. 46.); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§. 114.).

COROLLARIUM III.

117. Eadem ergo manet anguli quantitas, siue crura producantur, siue minuantur.

THEOREMA III.

118. *Angulorum æqualium A & a mensuræ BC & de sunt arcus similes, & contra si angulorum A & a mensuræ BC & de similes sunt, anguli æquales sunt.* Tab. II.
Fig. 37.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuscunque A vel a quantitas æstimetur per rationem arcus BC vel de ex vertice A vel a intra crura descripti ad integram peripheriam (§. 46.); si $A = a$, ratio arcuum BC & de ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet, consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§. 33.), similes sunt (§. 120. *Arithm.*). Quod erat unum.

Si arcus BC & de mensuræ angulorum A & a (§. 45.) fuerint similes; ad peripherias, quarum partes sunt (§. 33.), eandem rationem habent (§. 120. *Arith.*). Quare cum quantitas angulorum A & a per eam rationem æstimetur (§. 46.), eadem omnino esse debet, hoc est, anguli æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

119. Cum arcus similes eandem rationem habeant ad peripherias, quarum sunt partes (§. 120. *Arithm.*), si fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 126. *Arithm.*). Si ergo mensuræ angulorum æqualium fuerint partes ejusdem peripheriæ vel æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 118.) & contra.

THEOREMA IV.

Tab. E.
Fig. 7.

120. *Anguli recti KLM mensura est quadrans circuli.*

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§. 15.); erit $x=0$ (§. 53.). Sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 113.) angulorum x & o mensuræ AC & CB junctim sumtæ conficiunt semicirculum (§. 45.). Ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est, circuli quadrans. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

121. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 33.); angulus rectus est 90° (§. 47.).

COROLLARIUM II.

122. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 118.), & æqualis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM III.

123. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 54.).

THEOREMA V.

124. Duo anguli deinceps positi x & y , aut quotcunque ad idem punctum E super eadem recta CD constituti, sunt æquales duobus rectis. Et contra, si x & y fuerint duobus rectis æquales, CE sita est in directum ipsi ED .

Tab. I.

Fig. 4.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi, per hypoth. EC cum ED eandem rectam constituit (§. 50.). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E , per hypoth. Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 113.); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 45.). Sed idem est

mensura duorum rectorum (§. 120.). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 119.). *Quod erat unum.*

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita, recta quædam alia, veluti EA , ipsi ED in directum jacebit (§. 15.), atque hinc $o + y$ & x erunt deinceps positi (§. 50.), consequenter duobus rectis æquales, *per demonstrata*, adeoque $o + y + x = y + x$ (§. 65. *Arith.* & §. 122. *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 63. *Arith.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

125. Anguli, qui sunt deinceps, x & y , aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, efficiunt 180° (§. 121.).

COROLLARIUM II.

126. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM III.

127. Si in campo angulum inaccessum vel obtusum Quadrante metiri jubemur & eum qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 126.).

COROLLARIUM IV.

128. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si, finita operatione, deinceps positos etiam metiaris & hos singulos illis singulis addas: quod si enim ubique prodierit summa 180° , operatio rite peracta (§. 125.)

PROBLEMA V.

129. *Angulum metiri.*

Tab. II.
Fig. 27.

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 45.), totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta

1. Centrum semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri BC admoveatur.
2. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto numerantur.

II. In Campo

1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur, collineando per dioptras F & G,

Tab. II.
Fig. 28.

Q 5 seu

seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero, perpendiculum ad centrum instrumenti applicando.

2. Regula HI circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.

3. Gradus, quem regula in instrumento indicat, notatur.

SCHOLIUM.

130. Semicirculus minor, quo in charta utitur, instrumentum transportatorium vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro; quidam nonnisi quadrante utuntur.

PROBLEMA VI.

Tab. II. 131. Data quantitate anguli, ipsum
Fig. 27. describere.

RESOLUTIO.

1. In charta

1. Ducatur recta CB &

2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum instrumenti transportatorii, ita, ut radius ejus cum recta CB coincidat.

3. Numerentur gradus dati ab E versus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.

4. Du-

4. Ducatur recta CDA. Erit ACB angulus quæsitus (§. 118.).

II. In campo

Tab. II.
Fig. 28.

1. Collocetur instrumentum goniometricum ut in probl. præc. (§. 129.).
2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.
3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VI.

Tab. I.
Fig. 4.

132. Si recta AB alteram CD secet in E, anguli verticales x & o , item y & E, sunt æquales.

DEMONSTRATIO.

$$x + y = 180^\circ \quad (\S. 125.)$$

$$y + o = 180^\circ$$

Ergo $x + y = y + o$ (§. 65. Arith.), adeoque $x = o$ (§. 69. Arithm.). Eodem modo ostenditur, esse $y = E$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

133. Quodsi in campo aut alio in casu angulum inaccessum x metiri jubeamur; accessum vero non neget verticalis o : hunc ejus loco metiri licet.

THEOREMA VII.

Tab. I.
Fig. 4.

134. Omnes anguli x , y , o , E & c. circa punctum aliquod E constituti sunt æquales quatuor rectis.

DE-

DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto E, vertice cumuni angulorum x, y, o, E &c. (§. 42.), intervallo quocunque E a circulus (§. 110.); evidens est, mensuras omnium angulorum simul sumtas db, bc, ca, ad &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 120.). Mensura ergo angulorum x, y, o, E &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 45.). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 120.). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 118.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

135. Omnes itaque anguli circa idem punctum constituti junctim 360° conficiunt (§. 121.).

THEOREMA VIII.

136. Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 2.). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter æqualia sunt (§. 12. *Arithm.*). Quod erat unum.

Por-

Porro quoniam, quæ sibi mutuo congruunt, eosdem terminos habere possunt (§. 2.): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 106.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IX.

137. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§. 21. *Arithm.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 12. *Arithm.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur, diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum *per demonstrata*, iisdem terminis contineri debent, consequenter sibi mutuo congruunt (§. 2.). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

138. *Si linea lineæ congruit, singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§. 2.). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta; secundum latitudinem & profunditatem ipsæ-

met sui termini existunt (§. 8.). Ergo si lineæ congruunt, non modo puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

139. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§. 31.), consequenter circuli ipsi congruere debent (§. 2.).

COROLLARIUM II.

140. Ex uno itaque puncto eodem radio circulus nonnisi unicus describi potest.

THEOREMA XI.

Tab. II.
Fig. 26.

141. Si fuerint duo anguli BAC & bac æquales, & vertex unius a ponatur super verticem alterius A ; præterea crus illius ac super crus hujus AC : etiam crus alterum ab super alterum AB cadet.

DEMONSTRATIO.

Si negas, necesse est ut ab vel intra angulum BAC , vel extra eum cadat. Ducatur ex A radio AD arcus Df (§. 110.): erit DE mensura anguli BAC , De vel Df mensura anguli bac (§. 45.). Ergo in casu priore De mensura anguli bac minor; in posteriore eadem mensura Df major foret mensura anguli BAC (§. 16. *Arithm.*). Quod utrumque cum sit absurdum.

furdum (§. 119.); crus *ab* super AB cadit. Q. e. d.

THEOREMA XII.

142. Si vertex & crura anguli unius *DAE* supra verticem & crura alterius *BAC* cadant; angulus unus *DAE* alteri *BAC* æqualis est. Tab. I.
Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Describatur enim ex communi vertice A intra crura AD & AE arcus DE (§. 110.); erit is mensura anguli *DAE* (§. 45.). Sed quoniam crura DA & AE supra crura alterius anguli BA & AC cadunt, per *hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Est igitur & mensura anguli *BAC* (§. cit.), consequenter $DAE = BAC$ (§. 119.). Q. e. d.

THEOREMA XIII.

143. Lineæ rectæ æquales sibi mutuo congruunt. Tab. II.
Fig. 29.

DEMONSTRATIO.

Est $ab = AB$ per *hypoth.* Est vero etiam recta *ab* similis rectæ AB (§. 12.). Ergo *ab* ipsi AB congruit (§. 137.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

144. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *ab* supra AB cadat, etiam *b* supra B cadet (§. 28.).
Co-

COROLLARIUM II.

145. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius erunt in recta altera (§ 138.), atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

THEOREMA XIV.

Tab. I.
Fig. 2.

146. Si centro circuli C applicetur linea rectæ CD , radio AC æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis, per *hypoth.* ipsi congruet (§. 143.); adeoque eosdem cum eo terminos habere debet (§. 2.). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 21.). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

147. Anguli similes sunt etiam æquales.

DEMONSTRATIO.

In angulis similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 19. *Arithm.*). Quare cum anguli distinguantur,

tur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam (§. 46.), si anguli sunt similes, arcus isti ad suas peripherias eandem rationem habere, hoc est, & ipsi similes esse debent (§. 118. *Geom.* & §. 120. *Arith.*). Sunt igitur anguli æquales (§. 118.).
Q. e. d.

THEOREMA XVI.

148. *In figuris similibus anguli homologi sunt æquales & latera homologa proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 19. *Arith.*). Quare cum figuræ nequeant distinguere nisi per angulos & latera; illi æquales (§. 147.), hæc proportionalia esse debent (§. 112. *Arith.*). Q. e. d.

THEOREMA XVII.

149. *Figurarum sibi mutuo congruentium RTVS & rtus anguli & latera homologa inter se æqualia sunt.* Tab. II. Fig. 21.

Wolf Mathes.

R

De

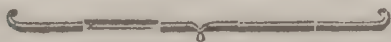
DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTVS & rtus sibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriusque termini esse possunt (§. 2.). Quare cum termini earum sint perimetri (§. 23.); una rtus supra alteram RTVS ita poni potest, ut *tu* ipsi TV, *tr* ipsi TR, *rs* ipsi RS &c. congruat. Ergo latera homologa sunt inter se æqualia (§. 136.). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TV, TR, RS, SV & *tu*, *tr*, *rs*, *su* crura angulorum homologorum (§. 42.). Quamobrem & anguli homologæ æquales sunt (§. 142.). *Quod erat alterum.*

CAPUT III.

DE

LINEARUM RECTARUM ET
TRIANGULORUM SYMPTOMATIS.

THEOREMA XVIII.

Tab. II. 150. Si in duobus triangulis ABC &
Fig. 31. abc fuerit $A=a$, $AB=ab$, $AC=a_c$; erit
etiam

etiam $BC = bc$, $C = c$, $B = b$ totaque tri-
angula æqualia & similia erunt.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus, triangulum abc ita po-
ni super alterum ABC , ut punctum a
super A & recta ab super AB cadat.
Quoniam $ab = AB$, $a = A$ & $ac = AC$, per
hypoth. punctum b super B (§. 144.),
recta ac super AC (§. 141.) & punctum
 c super C (§. 144.), consequenter bc su-
per BC (§. 145.) cadit, adeoque $\triangle abc$
alteri ABC congruit (§. 2.), consequen-
ter $bc = BC$ (§. 136.), $c = C$ & $b = B$ (§.
142.), totaque triangula æqualia & si-
milis sunt (§. 136.). Q. e. d.

PROBLEMA VII.

151. *Datis duobus lateribus AB & AC cum angulo intercepto A, triangu-
lum construere.* Tab. II.
Fig. 31.

RESOLUTIO.

1. Assumpto AB pro basi, in A constitua-
tur angulus datus (§. 131.).
2. In crus ejus alterum transferatur al-
tera datarum AC .
3. Tandem ducatur recta BC . Erit ABC
triangulum desideratum (§. 150.).

SCHOLIUM.

152. *Tyroneſe latera & angulos datos in nume-
ris aſſumant: quod in aliquibus caſibus ad demon-
ſtrationes empiricas diſtinctius percipiendas proderit.*

COROLLARIUM I.

153. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM II.

154. Quare si in duobus triangulis ACB & acb fiat $a=A$ & $ab:ac=AB:AC$; triangula eodem modo determinantur (§. 105.), adeoque similia sunt (§. 106.), consequenter etiam $c=C$ & $b=B$, $ab:bc=AB:BC$ & c. (§. 148.)

THEOREMA XIX.

Tab. II.
Fig. 36.

155. In triangulo æquicruo DFE
1. anguli ad basin y & u sunt æquales,
2. recta FG, quæ angulum DFE bisariam secat, basin quoque DE, & 3. triangulum ipsum bisariam secat: immo 4. FG ad basin DE perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam $c=x$, per hypoth. $DF=FE$ (§. 75.) & $FC=FG$ (§. 60. Arith.). Ergo 1. $y=u$, 2. $DG=GE$, 3. $\triangle DFG=\triangle GFE$ (§. 150.). Et quia etiam anguli ad G æquales, (per §. cit.) 4. FG ad DE normalis est (§. 67.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

156. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicruum (§. 74. 75.); theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEO.

THEOREMA XX.

157. *In triangulo æquilatelo ABC omnes anguli sunt inter se æquales.* Tab. I.
Fig. 12.

DEMONSTRATIO.

Est enim $AC = CB$ (§. 74.). Ergo $A = B$ (§. 155.). Est vero etiam $AC = AB$ (§. 74.). Ergo $C = B$ (§. 155.). Quare $A = C$ (§. 65. *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

158. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 91.).

THEOREMA XXI.

159. *Si trianguli ABC latus unum AC continuetur in D; erit angulus externus DAB major quolibet interno opposito B vel C.* Tab. V.
Fig. 67.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB bifariam divisa in F ductaque recta CF producenda in G (§. 15.), donec fiat $GF = FC$. Quoniam GC secat AB in F (§. 41.), erit $z = y$ (§. 132.), consequenter $o = x$ (§. 150.). Sed $DAB > o$ (§. 63. *Arithm.*). Ergo & $DAB > x$ (§. 67. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse DAB, aut, quod perinde est (§. 132.), ejus verticalem $HAC > ACB$. Q. e. d.

THEOREMA XXII.

Tab. IV. 160. In omni triangulo ABC latus
 1g. 57. majus AC opponitur majori angulo B ;
 minus AB minori C ; & contra.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB < AC$, per *hypoth.* parti
 hujus AD æqualis est (§. 16. *Arithm.*).
 Ducatur recta BD (§. 107.): erit BAD
 triangulum æquicrurum (§. 75.), adeo-
 que $o = x$ (§. 155.). Sed $o > C$ (§. 159.).
 Ergo $x > C$ (§. 67. *Arithm.*), conse-
 quenter multo magis $B > C$. Quod erat
 unum.

Sit $B > C$, per *hypoth.* Si non fit AC
 $> AB$, erit vel $AC = AB$, vel $AC <$
 AB , adeoque in casu primo $B = C$ (§. 155.),
 in altero $B < C$, per *demonstr.* Sed cum
 utrumque hypothesin evertat: absurdum
 est, consequenter si angulus $B > C$,
 etiam $AC > AB$. Quod erat alterum.

THEOREMA XXIII.

Tab. IV. 161. In omni triangulo ABD duo la-
 Fig. 57. tera AD & BD simul sumpta sunt tertio
 AB majora.

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 15. donec fiat
 $BD = DC$, adeoque $AC = AD + DB$ (§. 66.
Arithm.); erit $\triangle BDC$ æquicrurum (§. 75.)
 & hinc $y = C$ (§. 155.). Cum vero sit y

<

$< x+y$ (§. 63. *Arithm.*); erit etiam
 $C < x+y$ (§. 67. *Arithm.*). Quare AC
 seu $AD+DB > AB$ (§. 16c.). Q. e. d.

PROBLEMA VIII.

162. Metiri distantiam duorum loco-
 rum A & B ex eodem tertio C accessorum.

RESOLUTIO.

1. In loco C ad arbitrium electo defiga-
 tur baculus. Tab. II.
Fig. 33.
2. Linea AC transferatur ope funis vel
 catenæ ex C in a , ita ut baculus in a
 defigendus sit cum C & A in eadem
 recta (§. 108.).
3. Eadem ratione ex C in b transferatur
 linea CB.
4. Investigetur longitudo rectæ $a b$ (§.
 109.). Dico, ab esse æqualem distantia
 quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar
 in eodem plano sitorum considerentur,
 eorum distantia est recta AB. Quoniam
 vero A a & B b sunt lineæ rectæ per con-
 str. & se mutuo secant in C (§. 41.);
 erit $x=y$ (§. 132.).

Præterea $aC=CA$.
 $bC=CB$ } per constr.

Ergo $ba=AB$ (§. 150.). Q. e. d.

*Aliter.*Tab. II.
Fig. 33.

1. Collocato instrumento goniometrico in C investigetur quantitas anguli x (§. 129.).
 2. Quærat^{ur} porro longitudo rectarum AC & BC (§. 109.).
 3. Ex datis cruribus AC & CB cum angulo intercepto x construatur juxta scalam geometricam modicam triangulum acb (§. 151.).
 4. Inveniatur in eadem mensura longitudo basis ab (§. 109.).
- Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Est enim $x=x$ & $ac:cb=AC:CB$, per constr. consequenter $cb:ab=CB:AB$ (§. 154.). Ergo iidem numeri, qui respondent rectis cb & ab in mensura modica, etiam rectis CB & AB in majorere-
spondent (§. 113. *Arithm.*). Q. e. d.

*Aliter.*Tab. II.
Fig. 34.

1. In mensula geometrica in C horizontaliter collocata assumatur punctum c , & in eo acicula defigatur, ad quam
2. applicata regula cum dioptris tamdiu huc illucque moveatur, donec per ea prospicienti punctum B occurrat, ducaturque in hoc regulæ situ recta cb .
3. Similiter collineatio fiat in punctum A ducaturque ca .

4. In

4. Investigetur longitudo rectarum cA & cB (§. 109.), &
 5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex c in a & b .
 6. Tandem in eadem mensura invenitur longitudo ipsius ab (§. 109.).
- Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

PROBLEMA IX.

163. *Super data recta AB triangulum æquilaterum construere.*

Tab. I.

Fig. 12.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro intervallo ipsius AB describatur arcus y &
2. Ex B eodem intervallo alius x (§. 110.), qui priorem in C interfecabit.
3. Ducantur rectæ AC & CB ; erit ACB triangulum æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

Etenim $AC=AB$ & $BC=AB$ (§. 32.). Ergo $AC=BC$ (§. 65.). *Arithm.* Quare triangulum ABC est æquilaterum (§. 74.).
Q. e. d.

PROBLEMA X.

164. *Data basi DE & crure DF, quod illa dimidia majus sit, triangulum æquicrurum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I.
Fig. 13.

1. Ex uno basis extremo D intervallo cruris dati DF describatur arcus &
2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 110.) qui ob $DF + EF > DE$ per *hypoth.* & *constr.* priorem in F interfecabit.
3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 107.). Dico, DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

$DF = FE$, per *constr.* Ergo DFE est triangulum æquicrurum (§. 75.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

165. Determinatis ergo basi DE & crure DF totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM II.

166. Duo igitur triangula æquicrura DFE & dfe eodem modo determinantur, si fiat $DF : DE = df : de$ (§. 105.), consequenter similia (§. 106.), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 148. & 95.).

THEOREMA XXIV.

167. Si in duobus triangulis ACB & ^{Tab. II.} acb fuerit $AC=ac$, $AB=ab$, $BC=bc$; ^{Fig. 31.} etiam $A=a$, $B=b$, $C=c$, totaque triangula æqualia sunt & similia.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A radio AC descriptus concipiatur arcus y & ex centro B radio BC alius x (§. 110.). Concipiamus porro $\triangle acb$ ita poni supra $\triangle ACB$, ut punctum a super A & recta ab super ABC cadat. Quoniam $ab=AB$, per hypoth. punctum b super B cadet (§. 144.). Et quia $ac=AC$ & $bc=BC$, per hypoth. recta ac in arcu y & bc in arcu x terminabitur (§. 146.), consequenter quia hi arcus in unico tantum puncto se interfecant, punctum c super C cadet & rectæ ac , bc rectis AC, BC congruent (§. 145.). Quare $a=A$, $b=B$, $c=C$ (§. 142.); cumque $\triangle acb$ alteri ACB congruat (§. 2.), $\triangle acb=\triangle ACB$ (§. 136.). Q. e. d.

PROBLEMA XI.

168. Datis tribus lateribus AB, BC, ^{Tab. I.} CA, quorum duo simul sumpta AC & BC ^{Fig. 14.} tertio AB majora sunt, triangulum construere.

RESOLUTIO.

1. Assumta AB pro basi, ex A intervallo ipsius AC describatur arcus y &

2. Ex

2. ex B intervallo ipsius BC arcus alius x (§. 110.), qui ob $AC + BC > AB$ per *hypoth.* priorem in C secabit.
3. Ducantur rectæ AC & BC (§. 107.). Ita factum est, quod petebatur.

COROLLARIUM I.

169. Cum ex tribus datis rectis nonnisi unicum triangulum construi possit (§. 167.); determinatis lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

170. Quare si in duobus triangulis ACB & acb fiat $AC : AB = ac : ab$, $AC : BC = ac : bc$; triangula eodem modo determinantur (§. 105.), consequenter similia (§. 106.), adeoque sibi, mutuo æquiangula sunt (§. 148. 95.).

PROBLEMA XII.

Tab. II. 171. Angulo dato DAE æqualem bac
Fig. 37. constituere.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex A intervallo AC describatur arcus BC; erit $AB = AC$ (§. 32.).
2. Ducatur recta $ac = AC$ & ex a intervallo ipsius AB describatur arcus x , item
3. Ex c intervallo ipsius CB alius y , qui ob $AB + BC > AC$, seu $ab + bc > ac$ (§. 161.), priorem in b interfecabit
4. Ducatur recta ab (§. 107.).

Di-

Dico esse $a = A$.

II. In solo

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 108.).
2. In a & c defigantur baculi, eâ lege, ut sit $ac = AC$.
3. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut pars ipsius $ab = AB$ & altera $cb = CB$ fiat.

4. In b defigatur baculus.

Dico esse $bac = BAC$.

Interdum etiam in solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu $ac = AC$, $ab = AB$, $cb = CB$, per construct. Ergo $bac = BAC$ (§. 167.). Q. e. d.

PROBLEMA XIII.

172. Angulum datum HIK in duas partes æquales dividere. Tab II.
Fig. 38.

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur radio quocunque arcus LM (§. 110.).
 2. Ex L & M intervallo dimidia LM majore ducantur arcus se mutuo secantes in N.
 3. Ducatur recta IN (§. 107.).
- Dico esse $HIN = NIK$.

DE-

DEMONSTRATIO.

Est enim $IL=IM$ (§. 32.), $LN=MN$
per constr. $IN=IN$. Ergo $HIN=NIK$
 (§. 167.). *Q. e. d.*

PROBLEMA. XIV.

Tab. II.
 Fig. 30.

173. *Lineam rectam AB in duas partes æquales dividere & in medio ejus perpendiculararem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta.

1. Ex A & B intervallo dimidia AB majore ducantur arcus se mutuo in C secantes.
2. Fiat similis intersectio infra lineam in D
- 3 Ducatur recta DC (§. 107.).
 Dico esse $AE=EB$.

DEMONSTRATIO.

Δ ACB est æquicrurum (§. 164.). & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 172.). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E & ad AB in E perpendicularis (§. 155.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II.
 Fig. 39.

1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto

3. Non

3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In solo.

1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicitur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineæ datæ rursus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION.

174. Duo modi posteriores equidem secandi re-
ctam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici,
quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi
egregius est usus.

PROBLEMA XV.

175. Ex puncto G in recta ML dato
perpendicularem GI excitare.

RESOLUTIO.

I. In charta.

1. Posito circino in G arbitrario inter-
vallo refectur utrinque partes æqua-
les GK & GH. Tab. II.
Fig. 32.
2. Ex punctis K & H intervallo dimidia
KH majore fiat intersectio in I.
3. Ducatur recta GI (§. 107.), quæ erit
ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam $KG=GH$ & $KI=IH$, *per construct.* $IG=IG$. Ergo anguli ad G sunt æquales (§. 167.), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 67.). *Q. e. d.*

RESOLUTIO alia.

Tab. II.
Fig. 35.

1. Normæ, hoc est, instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML , ut anguli vertex supra punctum datum G cadat.
2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 107.), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ est rectus, *per hypoth.* sed ipsi æqualis est IGL (§. 142.); ergo IGL est itidem rectus (§. 122.), adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 66.).

II. In solo.

Norma utimur majore. Aut

Tab. II.
Fig. 32.

1. Filum KIH in duas partes æquales in I divisum ex punctis KIH extenditur &
2. In I baculus defigitur, tandemque
3. KH bifariam secatur in G (§. 173.). Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum $KI=HI$, & $KG=GH$, *per construct.* $GI=GI$; anguli ad G deinceps positi

positi sunt æquales (§. 167.), consequenter IG ad ML normalis (§. 67.). Q. e. d.

THEOREMA XXV.

176. Si duopuncta H & Q alicujus rectæ HI a duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinque æqualiter distent; erit HI ad MN perpendicularis. Tab. III.
Fig. 40.

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, per hypoth. HK = HL & QK = QL, Est vero etiam QH = QH. Ergo $o = x$ (§. 167.), consequenter cum HI = HI, anguli ad I æquales (§. 150.), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 67.). Q. e. d.

PROBLEMA XVI.

177. A dato puncto H ad rectam MN perpendicularem HI demittere. Tab. III.
Fig. 40.

RESOLUTIO.

I. In charta.

1. Posito circino in H intervallo arbitrario, eodem tamen, intersecetur MN in K & L.
 2. Ex K & L fiat intersectio in Q.
 3. Ducatur per Q recta HI (§. 107.).
- Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KQ = LQ per construct. puncta H & Q a punctis K & L
Wolf. Mathes. S utrin-

utrinque æqualiter distant. Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 176.). Q. e. d.

Aliter.

Tab. II.
Fig. 35.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat.
2. Ducatur recta GI (§. 107.), quæ ad ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ in casu simili problematis (§. 175.).

H. In solo.

Tab. III.
Fig. 40.

Aut utimur norma majore, ut in probl. (§. 115.) aut

1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi designantur (§. 108.).
2. Intervallum KL dividitur biseriam in I (§. 173.).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH=LI & KI=LI, per construct. HI=HI; anguli ad I sunt æquales (§. 167.), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 67.). Q. e. d.

THEOREMA XXVI.

Tab. VIII. 178. In omni triangulo rectangulo HIK
Fig. 110. angulus nonnisi x rectus est; reliqui H & K sunt acuti.

DE-

DEMONSTRATIO.

Angulus y rectus est (§. 67.). Sed $y > m$, item $> H$ (§. 159.). Ergo K & H sunt recto minores, adeoque acuti (§. 54.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

179. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

180. In triangulo rectangulo latus maximum est hypotenusa (§. 81. 160.).

THEOREMA XXVII.

181. Si HI fuerit parallela & BA perpendicularis ad KL ; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI . Tab. III.
Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Fiat $EB=BD$ & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 175.); erit $GE=CD$ (§. 6.) & $E=D$ (§. 66. 122.), consequenter $BG=BC$ & $y=u$ (§. 150.). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL , per *hypoth.* ideo $u+x=0+y$ (§. 67.). Ergo & $x=0$ (§. 6. Arithm.) Quare cum porro sit $AE=AB$; erit & $m=n$ (§. 150.), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 67.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. III.
[Fig. 43.]

182. Si duas parallelas AB & CD secet transversa EF in G & H; erunt 1. anguli alterni y & u æquales; 2. angulus externus x æquatur interno opposito u ; 3. duo interni oppositi o & u sunt æquales duobus rectis.

DEMONSTRATIO.

Si recta EF secet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifesta sunt per theorema (§. 181.). Si vero oblique secet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 175.). Producat GI in M & HK in L (§. 15.), donec fiat $IM = GI$ & $KL = HK$.

1. Quoniam GI perpendicularis ad CD per construct. erunt anguli ad I æquales (§. 67.). Porro $GI = IM$ per constr. & $HI = HL$. Ergo $GI = HM$ & $u = z$ (§. 15c.). Eodem modo ostenditur esse $IG = GL$ & $y = t$. Quamobrem & $GL = BM$ (§. 65. Arithm.). Est vero etiam $HI = GI$ (§. 69.) & hinc $IK + KL = GI + IM$ (§. 66. Arithm.), hoc est, $HL = GM$ (§. 64. Arithm.) & $GH = CH$: Unde $t + y = u + z$ (§. 167.). Cum itaque $t = y$ & $u = z$ per demonstrata: erit $y + y = u + u$ (§. 12. Arithm.), hoc est, $2y = 2u$, consequenter $y = u$ (§. 72. Arithm.) Quod erat primum.

2. $x=y$ (§. 132.) & $u=y$ (per n. 1).
Ergo $x=u$ (§. 65. *Arithm.*). Quod erat
alterum.

3. $x+0=180^\circ$ (§. 125.). Sed $x=u$
(per num. 2.). Ergo $u+0=180^\circ$ (§. 12.
Arithm.). Quod erat tertium.

PROBLEMA XVII.

183. Datis duobus lateribus AB & BC
cum angulo A uni eorum BC opposito,
triangulum ABC construere.

RESOLUTIO.

Tab. II.

Fig. 31.

1. Ducta recta AB, in puncto A exci-
tetur angulus dato æqualis (§. 171.),
factaque AB uni datorum laterum
æquali.
2. Ex B intervallo alterius lateris dati
BC crus anguli AC intersecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta
(§. 107.). Sic factum est, quod pe-
tebatur.
4. Quodsi $BC < BA$, aut bis secabit crus
AC, aut idem tangit, adeoque in
calu posteriore angulus ad C rectus
est (§. 233.), in priore constare de-
bet, utrum angulus ad C sit acutus,
an obtusus.

COROLLARIUM I.

184. Cum ex duobus lateribus atque angulo uni eorum opposito triangulum constitui possit; iis datis reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare si in duobus triangulis ejusdem speciei ABC & abc fuerit $AB = ab$, $BC = bc$ & $A = a$; erit etiam $AC = ac$, $B = b$, $C = c$ & $\triangle ABC = \triangle abc$.

COROLLARIUM II.

185. Quodsi in duobus triangulis ejusdem speciei, veluti acutangulis, ABC & abc fuerit $A = a$ & $AB:BC = ab:bc$, triangula eodem determinantur (§. 105.), adeoque similia sunt (§. 106.), consequenter etiam $B = b$, $C = c$, $BC:CA = bc:ca$ & $CA:AB = ca:ab$ (§. 148.).

THEOREMA XXIX.

Tab. III.
Fig. 42.

186. Si trianguli cujuscunque ACB latus unum BC continuetur in D ; erit angulus externus DCA æqualis duobus internis oppositis y & z simul sumtis.

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit $x = y$ & $o = z$ (§. 182.), consequenter $x + o = y + z$ (§. 66. Arithm.). Q. e. d.

THEO-

THEOREMA XXX.

187. In quovis triangulo ACB tres ^{Tab. III.} anguli y, u, z junctim sumti sunt ^{Fig. 42.} æquales duobus rectis seu 180° .

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 186.). Ergo
 $o + x + u = y + z + u$ (§. 66. Arithm.).
 Sed $o + x + u = 180^\circ$ (§. 124.): ergo
 $y + z + u = 180^\circ$ (§. 65. Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

188. In triangulo igitur rectangulo MKL ^{Tab. I.} duo anguli obliqui M & L junctim sumti ef- ^{Fig. 15.} ficiunt rectum seu 90° , adeoque semirecti sunt, si fuerit æquicrurum (§. 155.).

COROLLARIUM II.

189. Si unus angulus est obtusus, duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 54.).

COROLLARIUM III.

190. In triangulo æquilatERO ACB quili- ^{Tab. 1.} bet angulus est 60° , nimirum $180:3$ (§. 157.). ^{Fig. 12.}

COROLLARIUM IV.

191. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 77.): triangulum rectangulum æquilaterum esse nequit.

COROLLARIUM V.

192. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur, summa duorum reliquorum relinquitur; & si summa duorum ex 180° aufertur, residuus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

193. Si duo anguli unius trianguli æquantur duobus alterius sive figillatim, sive junctim; etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 69. *Arithm.*).

COROLLARIUM VII.

194. Quoniam in triangulo æquicruro DFE
 Tab. I. anguli ad basin y & u æquales sunt (§. 155.),
 Fig. 13. si angulus ad verticem F subtrahitur a 180°
 & residuum bifecatur, unus angulorum æqualium y vel u prodit. Similiter si duplum anguli unius ad basin y a 180° subtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur.

PROBLEMA XVIII.

Tab. III. 195. In extremitate F lineæ FG per:
 Fig. 44. pendicularem FH excitare.

RESOLUTIO.

1. Super FG confiruatur \triangle æquilaterum FIG (§. 163.).
2. Producatu'r GI in H (§. 107.), donec fiat $HI=GI$.
3. Ducatur recta HF (§. 107.): quæ erit ad FG perpendicularis.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam \triangle FIG est æquilaterum,
 per constr. $o=60^\circ$ & $u=60^\circ$ (§. 190.).
 Ergo $y=120^\circ$ (§. 186.), consequenter ob
 FI=HI per constr. $x=30^\circ$ (§. 194.)
 Cum adeo $x+o=90^\circ$; angulus ad F
 rectus (§. 121.) & HF ad FG perpen-
 dicularis est (§. 66.). Q. e. d.

THEOREMA XXXI.

196. Si in duobus triangulis ABC & abc fuerit $AB=ab$, $A=a$ & $B=b$; erit
 etiam $AC=ac$, $BC=bc$, $C=c$ & \triangle
 $ACB=\& \cup \triangle acb$. Tab. II.
Fig. 31.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus $\triangle abc$ poni supra al-
 terum ABC, ita ut punctum a super A
 & recta ab super AB cadat. Quoniam
 $ab=AB$, $a=A$ & $b=B$, per hypoth.
 punctum b super B (§. 144.), recta ac
 super AC & bc super BC (§. 141.), con-
 sequenter c super C (§. 146.) cadit. Cum
 adeo $\triangle abc$ alteri ABC congruat (§. 2.);
 erit $ac=AC$, $bc=BC$, $c=C$ (§. 149.)
 & $\triangle abc=\& \cup \triangle ABC$ (§. 136.)
 Q. e. d.

COROLLARIUM.

197. Si in duobus triangulis ACB & acb
 fuerit $A=a$, $B=b$ & $BC=bc$; erit etiam
 $C=c$ (§. 193.), consequenter $AC=ac$, AB
 $=ab$ & $\triangle ACB=\& \cup \triangle acb$ (§. 196.).

THEOREMA XXXII.

Tab. II. 198. *Si in triangulo DFE anguli ad*
 Fig. 36. *basin y & u æquales; triangulum est æqui-*
crurum.

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 172.); erit $DF = FE$ (§. 197.). Est ergo $\triangle DFE$ æquicrurum (§. 75.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

199. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 74.).

THEOREMA XXXII.

Tab. JII. 200. *Si duas lineas AB & CD secet*
 Fig. 43. *transversa EF in G & H, ita ut vel 1.*
y = u; vel 2. x = u; vel 3. $\angle + u = 180^\circ$;
erunt lineæ istæ inter se parallelæ.

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 177.); erit $K = I$ (§. 66. 122.). Est vero & $y = u$, per hypoth. & $HG = HG$. Quare $HK = GI$ (§. 197.), consequenter cum HK & GI sint distantie linearum AB & CD: lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ (§. 69.). Quod erat primum.

2. $x = u$ per hypoth. $x = y$ (§. 132.). Ergo $y = u$ (§. 65. Arithm.), consequenter
 AB

AB & CD sunt inter se parallelæ, per num.

1. Quod erat secundum.

3. $o + u = 180^\circ$, per hypoth. Sed $o + x = 180^\circ$ (§. 124.). Ergo $u = x$ (§. 65. 69. Arithm.), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, per num. 2. Quod erat tertium.

COROLLARIUM.

201. Si ergo $o + u < 180^\circ$, lineæ GB & HD versus eandem plagam convergent; adeoque productæ alicubi se mutuo secabunt.

PROBLEMA XIX.

202. Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere. Tab. III.
Fig. 47.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 177.).
2. Ex puncto quolibet T erigitur perpendicularis $TA = KV$ (§. 175.).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 69.).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcumque recta RG.
2. In V fiat $c = x$ (§. 671.).
Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 200.).

Ali.

Aliter.

Tab. III. Ex modo præcedente enatus est sequens.
Fig. * I. Triangulum rectangulum AVN ex ligno ebenino aut alio indico paratum ita applicetur ad rectam RS, ut basis ejus VN parti ipsius congruat.

2. Hypothenusæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detinea ur.

3. Triangulum AVN juxta ductam regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ basis VN ob $y = x$ ipsi RS parallela (§. 200.). Q. e. d.

Tab. III. II. In campo

Fig. 48. Commode utimur modo primo antecedentium, vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum alius in R & S delixis in eadem recta (§. 108.).

2. Ad V fiat $o = x$ (§. 171.).

Erit MV, quæ facile produci potest in N (§. 108.), ipsi RS parallela (§. 200.).

PROBLEMA XX.

Tab. I. 203. Datis recta AB & angulis adjacentibus, A & B qui junctim sunti duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.

RESOLUTIO.

I. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 131.).

2. Crura

2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 201.). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM I.

204. Data ergo linea una datisque duobus angulis triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

205. Quare si in duobus triangulis fiat $A=a$ & $B=b$: triangula eodem modo determinantur (§. 105.), adeoque similia sunt (§. 106.).

Tab. II.
Fig. 31.

COROLLARIUM III.

206. Si in duobus triangulis fuerit $A=a$ & $B=b$: consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 122.); erit etiam $C=c$ (§. 193.), hoc est, $\triangle ACB$ & $\triangle acb$ sibi mutuo æquiangula (§. 95.). Quare $\triangle ACB$ sibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 205.) & hinc latera homologa seu æqualibus angulis opposita proportionalia habent (§. 148.).

THEOREMA XXXIV.

207. Si in triangulo ABC recta DE basi AC parallela ducatur, segmenta crurum cruribus proportionalia sunt, hoc est, $BA:BC=BD:BE=AD:EC$ & $BA:AC=BD:DE$, atque $\triangle BDE \sim \triangle BAC$.

Tab. III.
Fig. 45.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC per *hypoth.* erit $x=y$ & $u=0$ (§. 182.) adeoque $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ & BA: BC=BD: BE & BA: AC=BD: DE (§. 206.). Cum etiam sit BA—BD: BC—BE=BD: BE (§. 137. *Arith.*). præterea BA—BD=AD & BC—BE=EC, erit AD: EC=BD: BE (§. 118. *Arith.*) seu AD: BD=EC: BE (§. 122. *Arith.*) Q. e. d.

THEOREMA XXXV.

Tab. III. 208. *Recta FH angulum GFE bifariam secans basin GE cruribus adjacentibus EF & GF proportionaliter secat.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 15.), donec fiat FI=GF; erit $0+x=y+u$ (§. 186.). Sed $0=x$ per *hypoth.* & $y=u$ (§. 155.), adeoque $2y=2u$ (§. 12. *Arithm.*). Ergo $0=y$ (§. 72. *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 200.). Quare EF: EH=FI: GH (§. 207.)=GF: GH (§. 118. *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA XXI.

Tab. III. 209. *Datis tribus lineis AB, AC & Fig. 50. BD invenire quartam proportionalem,*

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
 2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
 3. Ducatur recta BC (§. 107.).
 4. In D constituatur angulus ipsi ABC æqualis (§. 171.).
- Dico, esse $AB: AC = BD: CE$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o = x$ per constr. erit BC ipsi DE parallela (§. 200.). Quamobrem $AB: AC = BD: CE$ (§. 207.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

210. Quodsi, duabus lineis AB & AC datis, tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum $AB: AC = AC: CE$.

PROBLEMA XXII.

211. Datam rectam AB in quotcunque partes æquales dividere.

Tab. III.
Fig. 52.

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumpta refecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.
2. Super harum partium intervallo construatur triangulum æquilaterum CED (§. 163.).
3. Ex

3. Ex E in a transferatur recta AB itidemque ex E in b .
 4. Ducatur recta ab : ducantur itidem aliae ex E in 1. 2. 3. &c.
 Dico esse $ab = AB$, $a\ 1 = \frac{1}{2} AB$, $a\ 2 = \frac{2}{3} AB$ &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$ & $EC = ED$, per construct. erit $Ea : Eb = EC : ED$ (§. 118. 122. *Arithm.*). Quare cum angulus E utrique triangulo ECD & Eab communis sit: erit $EC : CD = Ea : ab$ & $o = x$ (§. 154.). Sed $EC = CD$, per construct. Ergo $Ea = ab$ (§. 109. *Arithm.*). Quod erat unum.

Quoniam $o = x$, per demonstr. erit ai parallela ipsi $C\ 1$ (§. 200.), consequenter $EC : C\ 1 = Ea : a\ 1$ (§. 207.), hoc est; ob $EC = CD$, per construct. & $Ea = ab$ per demonstr. $CD : C\ 1 = ab : a\ 1$ (§. 118. *Arithm.*). Sed $C\ 1 = \frac{1}{2} CD$ per construct. Ergo $a\ 1 = \frac{1}{2} ab$ (§. 109. *Arithm.*) Quod erat alterum.

Eodem modo ostenditur; esse $a\ 2 = \frac{2}{3} AB$ consequenter $1. 2 = \frac{1}{2} AB$, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. III. 212. Quodsi ergo CD fuerit utcumque di-
 vis. 51. visa in 1 & 2; eodem modo recta ab recabitur in eadem ratione. Est nempe $CD : C\ 1 = ab : a\ 1$, $CD : C\ 2 = ab : a\ 2$ &c. (§. 211.).

PRO-

PROBLEMA XXIII.

213. *Scalam Geometricam construere.* Tab. III.
Fig. 53.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF. in eam transferantur partes 10 æquales BI, 1. 2, 2. 3, 3. 4 &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit.
 2. In A excitetur perpendicularis AC, arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 195.).
 3. Per puncta divisionum 1. 2. 3. 4. 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 202.).
 4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.
 5. Tandem puncta 10. & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis tranversis connectantur (§. 107.).
- Dico si AB fuerit decempeda, fore BI, 1. 2, 2. 3, 3. 4 &c. pedes, 9. 9 digitum unum, 8. 8 digitos duos, 7. 7 tres, 6. 6 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

$B\ 1 = 1. 2 = 2. 3 \text{ \&c.} = \frac{1}{10} AB$ per construct. Sed pes est decempedæ pars decima (§. 18.). Ergo cum AB sit decempeda, per hypoth. erunt B. 1, 1. 2, 2. 3 &c. pedes. Quod erat unum.

Porro quia 99. est parallela ipsi A9, per construct. C. 9: CA = 9. 9: A9 (§. 207.).

Wolf. Mathes.

T

Sed

Sed $C 9 = \frac{1}{10} CA$, per construct. Ergo $9 \cdot 9 = \frac{1}{10} A 9$ (§. 109. *Arithm.*). Quare cum $A 9$ sit pes, per demonstr. erit $9 \cdot 9$ digitus (§. 18.). Eodem modo ostenditur esse $8 \cdot 8$ duos, $7 \cdot 7$ tres &c. digitos. Quod erat alterum.

S C H O L I O N.

214. Quemadmodum hic linea exigua $A 9$ in 10 partes aequales dividitur; ita eadem in quocunque alias eodem artificio dividi potest.

C O R O L L A R I U M

215. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K , erit intervallum $IK = I^o 4' 5''$ & ita porro.

P R O B L E M A XXIV.

Tab. IV. 216. Invenire distantiam duorum locorum AB , quorum unus B tantum accedi potest.
Fig. 54.

R E S O L U T I O.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C , ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 108.).
2. In C constituatur angulus DCE ipsi B æqualis (§. 171.).
3. Tandem ex C progrediendum versus D , donec baculus in D defixus sit cum F & C , itemque cum E & A in eadem recta (§. 108.).

Dico esse $DC = BA$.

DE.

DEMONSTRATIO.

Nam $BE=EC$, $o=x$, *per construct.*
 & $y=u$ (§. 132). Ergo $AB=DC$ (§. 196.).
Q. e. d.

Aliter.

1. Mensula geometrica in C collocata Tab. IV.
Fig. 56.
 per dioptras collineetur in A & B,
 ducanturque rectæ ac & cb .
2. Quæraturs distantia stationis a loco ac-
 cello AC (§. 109.) &
3. Ex scala geometrica in ac transfera-
 tur (§. 213.).
4. Translocetur mensula in A, ita ut
 punctum a ipsi A immineat & per d'op-
 tras regulæ ad ac applicatæ baculus
 in prima statione C defixus conspi-
 ciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducatur-
 que $a b$.
6. Denique in scala geometrica capiatur
 intervallum ipsius ab (§. 213.).
 Ita distantia quæsitæ AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $c=C$ & $a=A$ (*per construct.*
 & (§. 142.), erit $ac:ab=AC:AB$ (§.
 206.), hoc est, iidem numeri rationes
 $ac:ab$ & $AC:AB$ indigitant (§. 108.
Arithm.). *Q. e. d.*

Aliter.

- Tab. IV. 1. Baculo in C defixo investigetur quan-
Fig. 56. titas angulorum A & C (§. 129.),
itemque longitudo ipsius AC (§. 109.).
2. Ope instrumenti transportatorii &
scalæ geometricæ construatur triangu-
lum *acb* (§. 203.).
3. Ad scalam geometricam applicetur
recta *ab* (213.).
- Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXV.

217. Metiri distantiam duorum locorum
inaccessorum AB.

RESOLUTIO.

- Tab. IV. 1. Duabus stationibus in C & D electis in
Fig. 59. prima C collocetur mensula & per diop-
tras collineetur in D, B & A, ducantur
que juxta regulæ, cui affiguntur, du-
ctum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.
2. Quærat distantia stationum CD
(§. 109.) &
3. Ex scala geometrica transferatur in
cd (§. 215.).
4. Baculo in C defixo mensula colloce-
tur in D, ea lege, ut punctum *a* ipsi
D, hoc est, puncto, in quo defigeba-
tur ante baculus, immineat & per
diop-

dioptras regulæ ad cd applicatæ respicienti baculus in C occurrat.

5. Hinc porro collineatio fiat in A & B ducanturque rectæ da & db .
6. Tandem distantia punctorum a & b investigetur in scala geometrica (§. 215).

Dico esse $cd: ab = CD: AB$.

DEMONSTRATIO.

Est enim $cdb = CDB$ & $bcd = BCD$ (per constr. & §. 142.). Ergo $dc: cb = DC: CB$ (§. 206.). Similiter cum sit $acd = ACD$ & $adc = ADC$ (per constr. & §. 142.), erit $dc: ac = DC: AC$, adeoque $bc: ac = BC: AC$ (§. 139. Arith.), consequenter ob $acb = ACB$ (per constr. & §. 142.) $ac: ab = AC: AB$ (§. 154.) & ob $dc: ac = DC: AC$ (per demonstr.) $dc: ab = DC: AB$ (§. 140. Arith.).
Q. e. d.

Aliter.

1. Electis duabus stationibus C' & D investigetur quantitas angulorum y & x , item, z & w (§. 129.). quorum summae dant angulos C & D (§. 64. Arithm.).
2. Quæraturs porro distantia stationum CD (§. 109.) &
3. Ducatur in charta linea recta in quam ex scala geometrica transferatur recta cd ipsi CD respondens (§. 215.).

Tab. IV.
Fig. 60.

4. Super ea ope angulorum x & D construatur triangulum bcd & ope angulorum z & Calterum acd (§. 203.).
5. Tandem in scala geometrica investigetur distantia punctorum a & b . (§. 215.).

Dico esse $ab:cd=AB:CD$.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum proxime præcedente

SCHOLIUM I.

218. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus stationibus reperiri distantias plurium locorum,*

SCHOLIUM II.

Tab. IV. 219. *Nec minus manifestum est mensulæ situm in*
Fig. 58. *istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.*

PROBLEMA XXVI.

220. *Altitudinem accessam AB metri*

RESOLUTIO.

- Tab. V. 1. In distantia plurium e. gr. 30, 40 &
Fig. 61. *amplius pedum defigatur perpendiculariter baculus DE & aliquo hinc intervallo in Calius minor, ita, ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta.*
2. Investigetur distantia baculorum GF & baculi minoris ab altitudine quæsitâ HF.

HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 109.).

3. Quærat^{ur} ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 215. *Arithm.*).

4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC vel pars AH.

Dico summam esse altitudinem AB.]

E. gr. Sit $HF=48'$, $GF=20'$, $GE=16'$, $FC=5'$.

$$\begin{array}{r}
 20:16=48 \\
 \hline
 5 \quad 4 \quad 4 \\
 \hline
 192
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5) 192 \\
 \hline
 15 \\
 \hline
 42 \\
 \hline
 40 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 (38\frac{2}{3}=BH \\
 \hline
 5 = FC \\
 \hline
 43\frac{2}{3}=AB
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur; sintque BA (§. 101.) & ED *per constr.* ad AC perpendiculares; erunt eadem perpendiculares ad HF (§. 181.), adeoque GE & BH parallelæ (§. 200.), consequenter $GF:GE=HF:AB$ (§. 207.). *Quoderat unum.*

Porro cum HA & FC sint perpendiculares inter easdem parallelas HF & AC (*per constr.* & §. 101.); erit $FC=HA$ (§. 69.). Quare $BH+FC=BH+HA$ (§. 66. *Arithm.*) = BA (§. 64. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Mensula in D verticaliter erigatur, Tab. V.
Fig. 63.
ita, ut latus ipsius FE sit horizonti

T 4

pa-

Tab. IV.
Fig. 38.

parallellum : id quod obtinetur ope perpendiculari Q.

2. Ducatur recta *ef* lateri mensulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur mensula, donec collineatio in altitudinem quæsitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras transpicienti apex altitudinis *A* occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæraturs distantia stationis ab altitudine *eC* (§. 109.) &
5. Ex scala geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 215.) &
6. Ex *c* erigatur perpendicularum *bc* (§. 175.), quod
7. Ad scalam geometricam applicatum (§. 215.) partem altitudinis *AC* manifestat.
8. Addatur altitudo *BC*.
Dico, summam esse altitudinem *AB*.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *AC* perpendicularis ad *BD* (§. 101.) & *Ce* ipsa *BD* parallela *per constr.* erit eadem *AC* perpendicularis ad *CE* (§. 181.). Sed ad eandem etiā *bc* perpendicularis *per constr.* Ergo *bc* ipsi *AC* parallela (§. 200.), consequenter *ec:cb=EC:CA* (§. 207.).

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli *e* (§. 129.) & distantia stationis *eC* (§. 109.).
2. Su-

2. Super $e c$ in scala Geometrica minore assumpta (§. 215.). construatur triangulum ad c rectangulum cbe (§. 203.).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Est enim $c=C$ & $e=E$, per construct.
Ergo $ec:cb=EC:CA$ (§. 206.): Q. e. d.

SCHOLIÖN.

221. In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis, quæ cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas non tam instrumenti altitudo, quam ipsa CB addenda, in altitudine accessæ facile investiganda.

PROBLEMA XXVII.

222. Altitudinem inaccessam AB metiri.

RESOLUTIO.

1. Statione in D electa mensula collocetur ut in problemate præcedente (§. 220.). Tab. V.
Fig. 66.
n. I
2. Ducantur ut ibidem rectæ ef & af .
3. Baculi in G defixi, ut sit in recta fC . quæraturs distantia a puncto f (§. 109.) &
4. Ex scala Geometrica transferatur in fe (§. 215.).
5. Sub puncto f in D defigatur baculus & mensula ita collocetur in G , ut punctum e ipsi G immineat & per diop-

tras regulæ ad *ef* applicatæ respicienti baculus in *D* occurrat.

6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras prospiciens apicem *A* videat, ducaturque recta *ea*.
7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc* perpendicularis (§. 177.): quæ
8. Ad scalam geometricam (§. 215.) applicata prodit altitudinem *AC*.

Tab. v.
Fig. 66.
n. 2.

9. Quodsi puncta *B*, *F*, *D* fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti *f*, ut habeatur *AB*; sin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras despiciens videat *B*, ducatur *eb*, perpendiculum *ac* continuetur, donec ipsi *eb* in *b* occurrat. Etenim *ab* in scalam geometricam translata manifestabit *AB*.

DEMONSTRATIO

In $\triangle\triangle$ enim *fea* & *FeA* est angulus *a fe* = *AFC* & *aef* = *AeF* per construct. Ergo *fe*: *ea* = *Fe*: *eA* (§. 206.). Porro *AC* & *ac* perpendiculares ad *FC* (§. 101. & constr.), adeoque inter se parallelæ (§. 200.). Quare *ae*: *ac* = *Ae*: *AC* (§. 207.), consequenter *fe*: *ac* = *Fe*: *AC* (§. 138. Arithm.). Quod erat unum.

Quoniam *ab* parallela ipsi *AB* per demonstrata: erit *ae*: *ab* = *Ae*: *AB* (§. 207.), consequenter *fe*: *ab* = *Fe*: *AB* (per demonstrationem).

monstr. & (§. 138. Arithm.). Quod erat alterum.

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli AFC Tab. V.
in D & anguli AeC in G itemque CeB Fig. 66.
in eadem statione G (§. 129.).
2. Quærat distantia Fe (§. 109.).
3. Construat ex his datis juxta scalam
modicam triangulum a ef (§. 215.).
4. Demittatur ex vertice *a* in basin con-
tinuatam perpendicularis *ac* (§. 177.)
indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipsi CeB æqualis
(§. 171.) & producat crus *eb* donec
perpendiculari *eb* in *b* occurrat (§. 15.)
Dico esse *fc: ab=FC: AB.*

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

DE

CIRCULI SYMPTOMATIS.



THEOREMA XXXVI.

223. In eodem vel in æqualibus circu- Tab. V.
lis chordæ æquales AB & DE æquales Fig. 62.
arcus sustendunt: & contra.

DE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB = DE$ per *hypoth.* $BC = CE$ & $AC = DC$ (§. 32.); angulus $ACB = DCE$ (§. 176.), consequenter arcus AB & DE , mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 45.), æquales sunt (§. 119.). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE æquales sunt per *hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 45.): anguli igitur isti æquales sunt (§. 119.). Quoniam porro $BC = CE$ & $AC = CD$ (§. 32.); erit quoque $AB = DE$ (§. 150.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXVII.

Tab. V. 224. Si in circulis inæqualibus arcus AB
Fig. 62. & ab fuerint similes, chordæ cognomines ad suos radios AC & ac eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & ab similes sunt, per *hypoth.* iidemque mensuræ angulorum ACB & acb (§. 45.). erit $ACB = acb$ (§. 118.). Est vero $AC : BC = ac : bc$ (§. 32. *Geom.* & § 108. *Arithm.*). Ergo $AB : BC = ab : bc$ (§. 154.). Q. e. d.

THEOREMA XXXVIII.

Tab. V. 225. Radius CE chordam BA bifariam
Fig. 64. secans in D etiam arcum bifariam secat

IN

*in E & ad chordam AB perpendicularis:
& contra.*

DEMONSTRATIO.

$AD=DB$, per *hypoth.* $AC=CB$ (§. 32.)
& $DC=DC$. Ergo $o=x$ & $y=u$ (§. 167.),
consequenter CE ad AB perpendicularis
in D (§. 67.) & arcus AE atque EB , æqua-
lium angulorum u & y mensuræ (§. 45.),
æquales sunt (§. 119.), Quod erat
primum.

Sint arcus $A E$ & $E B$ æquales per
hypoth. cum iidem sint mensuræ angulo-
rum u & y (§. 45.); erit $y=u$ (§. 119.).
Est vero etiam $AC=CB$. (§. 32.) & DC
 $=DC$. Ergo $AD=DB$ & $o=x$ (§. 110.),
consequenter CD ad AB perpendicula-
ris (§. 67.). Quod erat secundum.

Sit denique radius CE perpendicularis
ad chordam AB in D per *hypoth.* erit
 $o=x$ (§. 67.). Est vero etiam $AC=CB$
(§. 32.) & hinc $m=n$ (§. 155.). conse-
quenter $y=u$ (§. 193.) Quare arcus AE &
 EB æqualium angulorum u & y mensuræ
æquales sunt (§. 119.) & $AD=DB$ (§.
196.). Quod erat tertium.

THEOREMA XXXIX.

226. Si recta NE chordam AB bifa-
riam secet & ad eam perpendicularis fue-
rit; per centrum transit & tam arcum
 AEB , quam ANB bifariam secat.

Tab. V.
Fig. 64.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, per hypoth. erit $o=x$ (§. 67.). Est vero etiam $AD=DB$ per hypoth. & $ND=ND$. Ergo $AN=NB$ (§. 150.), consequenter arcus cognomines æquales sunt (§. 223.) Eodem modo ostenditur arcus AE & EB æquales esse. Quod erat unum.

Arcus $AN=NB$ & $AE=EB$, per demonstr. Ergo $NA + AE=NB + BE$ (§. 66. Arithm.), consequenter NE diameter circuli (§. 112.), adeoque per centrum transit (§. 31.). Quod erat alterum.

PROBLEMA XXVIII.

227. Datum arcum AB in duas partes æquales dividere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. V.
Fig. 64.

Ducatur ad punctum medium E chordæ AB perpendicularis NE (§. 173.), hæc arcum AB bifariam secabit (§. 226.) Q. e. f. & d.

PROBLEMA XXIX.

Tab. V.
Fig. 65.

228. Per data tria puncta non in directum jacentia A, B & C. circulum describere.

RE-

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant intersectiones in D. & E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & GH (§. 107.)
Dico I esse centrum circuli per A, C & B describendi (§. 110.).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C & B sunt in peripheriis alicujus circuli *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 30.). Sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis & ED ipsam AC, GH vero BC bisariam fecat (§. 173.). Ergo utraque per centrum transit (§. 226.). Quare cum DE & GH in I se mutuo secant; erit I centrum circuli per puncta data A, C & B transeuntis. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

229. Assumptis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri datusque arcus perfici potest.

COROLLARIUM II.

230. Omne triangulum est circulo inscribibile (§. 102.).

THEO.

THEOREMA XL.

231. *Recta IL. radio CL perpendiculariter infistens tangit circulum in unico puncto L.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I.
Fig. 3.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 107.). Quoniam IL perpendicularis ad CL *per hypoth.* adeoque L est rectus (§. 66.); K erit acutus (§. 178.). Ergo $CK > CL$ (§. 180.): consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est, tota linea LI seu HI extra circulum cadit (§. 32.), & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 39.). Q. e. d.

THEOREMA XLI.

232. *Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I.
Fig. 3.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 177.) hæcque utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 39.), consequenter $CK > CN$ (§. 63. *Arithm.*) $> CL$ (§. 32. *Geom.* & §. 67. *Arithm.*). Est vero etiam

etiam $CK < CL$ (§. 180.): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

223. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 66.).

COROLLARIUM II.

224. Si HI circulum tangat & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 177.), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXX.

225. Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.

Tab. I.
Fig. 3.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL .
2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 195.), quæ circulum in L tanget (§. 232.). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA XLII.

226. Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.

Tab. VI.
Fig. 68.

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 177.); erit eadem perpendicularis ad GI (§. 181.) ob FH
Wolf. Mathes. U &

& GI per hypoth. parallelas, dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 225.) Quare $KF = GK = KH = KI$, hoc est, $FG = HI$ (§. 69. *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA XLIII.

Tab. I.
Fig. 9.

237. *Angulus ad centrum ACD est duplus anguli ad peripheriam ABD, eadem arcui AD insistentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 202.); erit $EB = DF$ (§. 236.), adeoque $o = x$ (§. 119.). Sed $o = y$ (§. 132.). Ergo $x = y$ (§. 65. *Arithm.*) $= \frac{1}{2} ACD$. Porro $o = u$ (§. 182.). Ergo $u = y = \frac{1}{2} ACD$ (§. 65. *Arithm.*) Quod erat primum.

Tab. VI.
Fig. 69.

II. In casu altero $o = 2y$ & $u = 2x$ per cas. I. Ergo $u + o = 2x + 2y$ (§. 66. *Arithm.*), hoc est, $ABD = \frac{1}{2} ACD$ (§. 72. *Arithm.*) Quod erat secundum.

Fig. 70.

III. In casu tertio $o + u = 2y + 2x$ per cas. I. & $o = 2y$ per cas. I. Ergo $u = 2x$ (§. 69. *Arithm.*) hoc est, $\frac{1}{2} ACD = ABD$ (§. 72. *Arithm.*). Quod erat tertium.

THEOREMA XLIV.

238. *Anguli ad peripheriam ABD mensura est arcus dimidius AD, cui insistit.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in maiore segmen- Tab. I.
Fig. 9.
to: insistet ergo arcui minori AD quam
semicirculo (§. 58. 44.) adeoque ipsi re-
spondet angulus ad centrum ACD (§. 60.
112.) Sed anguli ACD mensura est ar-
cus AD (§. 61.). Ergo ipsius ABD men-
sura dimidius arcus AD (§. 237. 119.).
Quod erat unum.

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Tab. VI.
Fig. 71.
Ducatur utcunque recta CD; erit arcus
dimidius AD mensura anguli ACD & $\frac{1}{2}$
DB mensura ipsius DCB *per cas. 1.* Ergo
 $\frac{1}{2}$ ADB mensura anguli ACB. *Quod erat
secundum.*

III. Sit denique HIK angulus in mi- Tab. VI.
Fig. 72.
nore segmento. Ducatur utcunque re-
cta IL; erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL mensura an-
guli HIL & $\frac{1}{2}$ LK mensura anguli LIK
per cas. 1. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK mensura
anguli HIK. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

239. Duo vel plures anguli HLI & HMI Tab. I.
Fig. 10.
eidem arcui HI vel æqualibus arcubus insisten-
tes æquales sunt (§. 119.).

COROLLARIUM II.

240. Quare cum porro sit $o = x + u$ (§. Tab. I.
Fig. 10.
186.); erit anguli extra centrum mensura di-
midium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus
verticalis K insistent (§. 238.).

COROLLARIUM. III.

Tab. VI. 241. Cum angulus in semicirculo ACB
Fig. 71. semicirculo insitit *per hypoth.* mensura ejus est
circuli quadrans (§. 238.), adeoque ipse re-
ctus est (§. 120.).

COROLLARIUM. IV.

Tab. VI. 242. Cum angulus in majore segmento DIF
Fig. 72. arcui minori DF, quam est semicirculus, in-
sistat (§. 58.), mensura ejus est semiquadrante
minor (§. 238.), adeoque ipse recto minor
(§. 120.), consequenter acutus (§. 54.).

COROLLARIUM. V.

Tab. VI. 243. Non ab simili ratione liquet, angulum
Fig. 72. in minore segmento HIK esse obtusum.

COROLLARIUM. VI.

Tab. VI. 244. Quoniam $0 = x + y$ (§. 186.). & an-
Fig. 73. guli 0 mensura est $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$
NO (§. 238.); anguli extra peripheriam G
mensura est differentia inter dimidium arcum
concavum LM, cui insitit, & dimidium
convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXI.

Tab. VI. 245. Normam examinare utrum exacta
Fig. 74. sit: nec ne.

RESOLUTIO.

1. Describatur intervallo arbitrario se-
micirculus AEF &

2. Du-

2. Ducantur in eo ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest; erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis est angulo AEF (§. 142.), adeoque rectus (§. 241.), consequenter norma exacta (§. 175.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXV.

246. *Mensura anguli minoris segmenti ATB est dimidium arcus TDB; anguli vero majoris segmenti BTH dimidium arcus majoris BGT.* Tab. VI.
Fig. 75.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATK rectus (§. 233.). Cum adeo ejus mensura sit arcus dimidius EBT (§. 112. 120.), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 238.); erit anguli ATB mensura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus EGT sit mensura anguli ETH (§. 112. 120.) & dimidius arcus EB mensura anguli BTE (§. 238.), esse

dimidium arcum BGT mensuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

247. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D vero arcus dimidius BGT (§. 238.); angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH (§. 119.)

COROLLARIUM II.

Tab. VI. 248. Si chorda GT ultra circulum continetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus subtentorum. Nam $ATF = GTH$ (§. 132.). Ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 246.). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. cit.). Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

PROBLEMA XXXII.

Tab. VI. 249. *Inter duas lineas AB & BE,*
Fig. 77. *mediam proportionalem BD invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum dividaturque AE bifariam in C (§. 173.).
2. Ex C intervallo ipsius AC describatur semicirculus ADE (§. 113.).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 175.).

Dico

Dico esse $AB: BD = BD: BE$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE ,
per construct. m & n sunt anguli recti
 (§. 66.). Sed $o+x$ est itidem rectus (§.
 241.) & y utrique triangulo ABD &
 ADE communis. Ergo $o=z$ (§. 193.),
 consequenter $y=x$ (§. cit.). & tunc $AB:$
 $BD = BD: BE$ (§. 206.). Q. e. d.

COROLLARIUM. I.

250. Cum sit $AB: BD = BD: BE$; ex
 data sagitta AB & dimidia chorda BD inveni-
 tur diameter (§. 215. *Arith.*). Sit e. gr. AB
 $= 80''$, $BD = 300''$; erit $BE = 1125''$, adeo-
 que $AB + BE = AE 1205''$ seu fere $12'$.

COROLLARIUM. II.

251. Ex demonstratione una liquet, Δ
 rectangulum ADE per lineam perpendicula-
 rem DB ex angulo recto D in hypothenusam
 AE demissam resolvi in duo triangula ABD &
 BDE inter se & toti ADE similia (§. 206.).

COROLLARIUM. III.

252. Cum adeo etiam sit $AB: AD = AD:$
 AE (§. cit.); si lineæ fuerint majores una da-
 tarum ex A in B , altera ex A in E transfer-
 tur, factisque reliquis ut, in resolutione pro-
 blematis, erit AD media proportionalis quaesita.

COROLLARIUM IV.

253. Si ergo AB sit unitas, erit BD radius ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 172. *Arithm.*).

THEOREMA XLVI.

Tab. V. 254. Si duæ chordæ HM & LI se
Fig. 10. mutuo secent in K; erit HK: LK=KL: KM.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $x=x$ & $u=u$ (§. 239.) ideo HK: LK=KL: KM (§. 206.)
Q. e. d.

THEOREMA XLVII.

Tab. VI. 255. Si fuerint duæ secantes GL &
Fig. 73. GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM: GL=GN: GO.

DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GLM communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 248.). Sed anguli OML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 238.). Quare GNO=OML (§. 119.) consequenter GM: GL=GN: GO (§. 206.).
Q. e. d.

THEOREMA XLVIII.

Tab. VI. 256. Si ex eodem puncto A ducantur
Fig. 80. duæ rectæ AD & AB, quarum altera
cir-

circulum tangit, altera secat; erit tangens AD media proportionalis inter totam secantem AB & ejus portionem extra circulum AC.

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§. 247.). Ergo $AC:AD = AD:AB$ (§. 206.). Q. e. d.

CAPUT V.

DE

FIGURARUM DESCRIPTIONE.

THEOREMA XLIX.

257. In parallelogrammis latera opposita sunt æqualia, & si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erunt eadem parallelogramma. Tab. VI.
Fig. 78.

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum per hypoth. erit OP parallela ipsi NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 88.), consequenter ducta diagonali PN, erit $x=o$ & $n=m$ (§. 182.), adeoque $OP=NQ$ & $ON=PQ$ (§. 196.) Quod erat unum.

Quodsi

Quodsi $OP = QN$ & $ON = PQ$ per *hypoth.* cum etiam sit $NP = NP$; erit $x = o$ & $n = m$ (§. 167.), consequenter OP ipsi QN & ON ipsi PQ parallela (§. 200.), adeoque $OPQN$ parallelogrammum (§. 88.). Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

258. Cum in Quadrato, oblongo, Rhombo & Rhomboide latera opposita æqualia sint (§. 84. 85. 86. 87.); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus & Rhomboides parallelogramma (§. 257.).

THEOREMA. L.

Tab. VI. 259. *Diagonalis dividit parallelogram-*
Fig. 78. *ma in duas partes æquales, anguli in iis*
diagonaliter oppositi sunt æquales, an-
guli vero ad idem latus oppositi duobus
rectis æquantur & duo latera simul sumta
sunt diagonali majora.

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammis $ON = PQ$ & $OP = QN$ (§. 257.). Sed $PN = PN$. Ergo $\triangle NOP = \triangle NQP$ (§. 167.). Quod erat unum.

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 88.): anguli O & N , N & Q , Q & P , P & O simul sumti æquantur duobus rectis (§. 182.). Quod erat secundum.

Quo-

Quoniam angulus $O + N = N + Q$
per demonstrata; erit $O = Q$ (§. 69.
Arithm.). Similiter quoniam $Q + P =$
 $Q + N$ *per demonstrata*; erit $P = N$ (§.
 69. *Arithm.*). Quod erat tertium.

Denique $NO + PO > NP$ & $PQ +$
 $QN > PN$ (§. 161.). Quod erat quar-
 tum.

PROBLEMA XXXIII.

260. Super data recta CD quadratum
 construere.

Tab. VI.
 Fig. 79.

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§.
 195.) $= CD$.
2. Ex D & A intervallo ipsius CD fiat
 intersectio in B .
3. Ducantur AB & DB .

DEMONSTRATIO.

$AC = CD = AB = BD$, *per constr.* Du-
 cta ergo diagonali AD , patet, esse $C = B$
 (§. 167.). Sed C rectus est, *per constr.*
 Ergo B etiam rectus (§. 122.), conse-
 quenter o & x , item y & m semirecti (§.
 188.), adeoque $o + y$ & $x + m$ itidem
 recti. Quare figura est quadratum (§.
 84.). Q. e. d.

PRO-

PROBLEMA XXXIV.

261. *Datis duabus rectis MI & IK rectangulum parallelogrammum seu oblongum construere.*

RESOLUTIO.

- Tab. VI. 1. Jungantur MI & IK ad angulos re-
Fig. 81: ctos (§. 195.).
2. Ex M intervallo $ML=IK$ describatur arcus & ex K intervallo $KL=IM$ alius priorum interfecans in L.
3. Ducantur rectæ ML & KL.

DEMONSTRATIO.

$MI=KL$ & $ML=IK$, per construct. Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 257.), consequenter $I=L$ & $I+M$ ac $I+K=$ duobus rectis (§. 259.). Sed o est rectus, per constr. Ergo & L (§. 119.), itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa oblongum (§. 86.). Q. e. d.

PROBLEMA XXXV.

- Tab. VI. 262. *Data recta GH una cum an-*
Fig. 82 *gulo obliquo G rhombum construere.*

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (§. 171.).

2. Fiat

2. Fiat $GE=GH$ & reliqua peragantur ut in probl. 33. (§. 260.).

DEMONSTRATIO.

$EG=EF=FH=HG$, per construct. Est ergo $EFHG$ parallelogrammum (§. 257.), consequenter $G=F$ & $G+H$ ac $G+E=$ duobus rectis (§. 259.). Sed G est angulus obliquus ex hypothesi: Ergo & F , consequenter etiam E & H sunt obliqui. Adeoque figura constructa rhombus est (§. 85.). Q. e. d.

PROBLEMA XXXVI.

263. Datis duabus rectis ON & OP una cum angulo intercipiendo O rhomboidem construere. Tab. VI.
Fig. 78.

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (§. 171.).
2. Reliqua peragantur ut in probl. 34. (§. 261.).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

THEOREMA LI.

264. Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales ducanturque subtensæ AB , BC , CD &c. figura circulo inscripta regularis est. Tab. VI.
Fig. 84.

DE-

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 223.) cumque anguli A, B, C &c. æqualibus arcibus BDE, CDA, DEB &c. insistant; ipsi quoque æquales sunt (§. 239.). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 92.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVII.

265. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360° : residuum est summa quæsitæ.

E. gr. Pentag.	180	Hexag.	180
	<u>5</u>		<u>6</u>
	900		1080
	<u>360</u>		<u>360</u>
	540		720

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Quælibet figura ex assumpto in ea
 Fig. 85. puncto F in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. Si ergo 180 per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium

nium angulorum in dictis triangulis (§. 187.). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos polygoni, semper efficiunt 360° (§. 134.). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360° , summa angulorum polygoni relinquitur. Q. e. d.

Aliter.

Cum numerus triangulorum ABC, CAD & DAE, in quæ resolvitur figura polygoni per diagonales AC & AD ex puncto A ductas a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario multatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D & E (§. 187.). Q. e. i. & d.

E. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180.

<u>3</u>	<u>4</u>
540	720

COROLLARIUM.

266. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus polygoni regularis (§. 92.).

PROBLEMA XXXVIII.

267. Dato polygono regulari cuicunque ABCDE circum scribere. Tab. VI. Fig. 84.

RESOLUTIO.

I. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 172.) ob an-

- angulos FED & FDE duobus rectis
minores concursuris in F (§. 201.).
2. Ex puncto concursus F describatur
radio EF circulus (§. 110.).

DEMONSTRATIO.

Quoniam o & u sunt angulorum poly-
goni dimidii, *per constr.* erit $o = u$
(§. 92. *Geom.* & §. 72. *Arithm.*), con-
sequenter $EF = FD$ (§. 108.). circulus
adeo transiens per E transit etiam per
D (§. 32.). Ducatur jam ex F in A re-
cta FA (§. 107.). Quoniam $o = x$, *per*
constr. $ED = AE$ (§. 92.) & $EF = EF$;
erit $AF = FD$ (§. 150.). Ergo circulus
transiens per D & E transit etiam per
A (§. 32.). Porro quia $AF = EF$, *per*
demonstr. erit $m = x$ (§. 155.). Sed x
dimidius angulus polygoni, *per constr.*
Ergo & m (§. 65. *Arithm.*), consequen-
ter etiam y . Quare si ducatur FB (§.
107.); erit, ut ante, $FB = EF$, adeo-
que radius circuli Eodem modo ostendi-
tur, FC &, si quæ plures fuerint rectæ
istiusmodi, esse radios circuli, adeoque
circulum transire per omnes angulos
polygoni, hoc est, eidem circumscribi
(§. 102.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

268. Omnis ergo figura regularis est circu-
lo inscriptibilis (§. 102.).

PRO-

PROBLEMA XXXIX.

269. *Invenire angulum in dato polygono regulari.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur polygonum regulare AB-CDE circulo inscriptum (§. 268.). Quoniam arcus dimidius BCDE est mensura anguli quæsitæ A (§. 238.); arcus vero AB, qui ipsius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum divisa (§. 223.); angulus polygoni A relinquitur, si arcum AB a semicirculo subtraxeris. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Quærat angulus pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 est arcus AB, qui ex 180 subductus relinquit 108 angulum pentagoni quæsitum.

PROBLEMA XL.

270. *Super data recta ED polygonum regulare quodcunque describere.*

RESOLUTIO.

1. Quærat angulus polygoni (§. 266. Tab. VI. 269.). Fig. 84.
2. Fiat in E ipsi æqualis (§. 131.) & EA = ED.
3. Per puncta A, E, D describatur circulus (§. 228.).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Wolf. Mathes.

X

Ita

Ita describetur figura quæsitæ (§. 264. 268.).

PROBLEMA XLI.

271. Circulo dato polygonum regulare quodcunque inscribere.

Tab. VI.

Fig. 84.

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360. per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 47.).
 2. Construatur is ad centrum (§. 131.).
 3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.
- Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 264. 103.). Q. e. f. & d.

SCHOLIUM.

272. Resolutio problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem instrumento transportatorio utamur (§. 131.): non tamen ideo contemnenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet.

COROLLARIUM.

Tab. VI.

Fig. 84.

573. Si Polygonum regulare circulo circumscribendum, fiat hoc modo:

1. Inscrubatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. pentagonum ABCDE,

si pentagonum $abcde$ circumscribendum (§. 271.). 2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam FH ad eandem in H normalem (§. 173.), quæ arcum cognominem in h secat. 3. Per A & B producantur radii FA & FB. 4. Per h ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in a & b occurrens; erit ab latus unum polygoni circumscripti. 5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat $Fe = d =$, $Fc = Fa$ & puncta a, e, d, c, b connectantur rectis ae, ed, dc, cb ; erit $abcde$ polygonum circulo circumscriptum.

THEOREMA LII.

274. Latus hexagoni AB æquatur radio circuli circumscripti AC. Tab. VI.
Fig. 83.

DEMONSTRATIO.

Angulus $C = 60^\circ$ (§. 45.). Ergo $A + B = 120^\circ$ (§. 192.), consequenter, ob $AC = BC$ (§. 32.), $A = B = 60^\circ$ (§. 155.). Quare $\triangle ACB$ æquilaterum (§. 199.), consequenter $AB = AC$ (§. 74.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

275. Hexagonum regulare circulo inscribitur, si radius ad peripheriam sexies applicetur.

X 2

COROL-

COROLLARIUM II.

276. Si super linea data AB hexagonum describendum; triangulum æquilaterum ACB construitur (§. 163.); est enim vertex C centrum circuli hexagono quæsito circumscribendi (§. 274.).

PROBLEMA XLII.

277. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuscunque & tot diagonalibus, quot sunt latera, demtis tribus, figuram construere.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Cum figura quælibet ABCDE per Fig. 86. diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE resolvatur, quot sunt latera, demtis duobus; non alia re opus est, quam ut unum triangulum super altero excitetur (§. 168.).

PROBLEMA XLIII.

Tab. VII. 278. *Datis omnibus lateribus figura Fig. 87. & tot angulis, quot sunt latera, demtis tribus, figuram construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 131.) & latera AE & bC per data debite determinentur.
3. Fiat

3. Fiat porro in C angulus conveniens (§ 131.) & determinetur latus DC &c.

4. Tandem ex E & D fiat intersectio in F intervallo laterum EF & FD.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur eritque æqualis quælitæ (§. 136. 149.).

Eodem modo construi possunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 92.).

COROLLARIUM.

279. Si omnes anguli præter unum F dentur; duo latera DF & FE ut dentur opus non est.

PROBLEMA XLIV.

280. *Areæ cuiusdam campestris rectilineæ a b c d e libere permeabilis ichnographiam perficere, hoc est, figuram areæ campestri similem describere.* Tab. VII.
Fig. 86.

RESOLUTIO.

1. Investigetur longitudo singulorum laterum *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 109.).

2. Construaturs figura ABCDEA (§. 277.) juxta scalam geometricam minorem (§. 215.).

Dico figuram ABCDE esse figuræ campi *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

Est enim $AB:BC=ab:bc$, $BC:CD=bc:cd$, $CD:DE=cd:de$ &c. Etenim e. gr. *ab* 6 & *bc* 7 pedum in campo existentibus, etiam $AB=6$ & $BC=7$ in charta *per constr.* Quare cum porro sit $AC:AB=ac:ab$, $AC:AD=ac:ad$, $AD:AE=ad:ae$ &c. *per constr.* erit $o=o$, $x=x$, $y=y$, $n=n$, $m=m$, $r=r$, $u=u$, $s=s$, $t=t$ (§. 170.), consequenter $x+m+r=x+m+r$, $y+n=y+n$, $u+s=u+s$ (§. 66. *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi *abcde* similis (§. 148.). Q. e. d.

Aliter.

- Tab. VII. 1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
 Fig. 88.
2. Investigetur longitudo rectarum *aB*, *aC*, *aD*, *aE* (§. 109.) &
 3. Exinde juxta scalam modicam (§. 215.) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

4. Du-

4. Ducantur bc, cd, de .

Dico $abcde$ esse similem figuræ $ABCDE$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in $\triangle abc$ & $\triangle ABC$ angulus a communis & $ab:ac=aB:aC$ per *constr.* erit angulus $abc=aBC$ & $acb=aCB$, nec non $ab:bc=AB:BC$ & $ac:bc=AC:BC$ (§. 154.). Similiter quoniam in $\triangle acd$ & $\triangle ACD$ angulus a communis & $ac:ad=aC:aD$, atque in $\triangle aed$ & $\triangle AED$ angulus a itidem communis & $ad:ae=aD:aE$ per *constr.* erit angulus $acd=aCD$ & $adc=aDC$, nec non $ac:cd=aC:CD$ & $ad:dc=aD:CD$, itemque angulus $ade=aDE$ & $aed=aED$, nec non $ad:de=aD:DE$ & $ae:ed=aE:ED$ (§. 154.). Quoniam itaque $a=a$, $b=B$, $acb+acd=aCB+aCD$, h. e. $c=C$, $adc+ade=aDC+aDE$, h. e. $d=D$ & denique $e=E$ per *demonstrata*, figuræ $abcde$ & $ABCDE$ inter se æquiangulæ sunt (§. 95.). Porro cum sit $ac:bc=aC:BC$ & $ac:cd=aC:CD$ per *demonstr.* erit etiam $bc:cd=BC:CD$ (§. 139. *Arithm.*) & cum sit $ad:dc=aD:DE$ per *demonstr.* erit denuo $dc:de=DC:DE$. Quamobrem cum quoque sit $ab:bc=aB:BC$ & $ae:ed=aE:ED$ per *demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia

proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ *abcde* & *ABCDE* fimiles (§. 148.).
Q. e. d.

Aliter.

- Tab. VII. I. Mensula intra figuram posita eligatur punctum *f*, ex quo per dioptras regulæ affixas, ut ante, collineatio fiat in baculos in *A, B, C, D, F* & *G* defixos ducanturque rectæ indefinitæ *fa, fb, fc, &c.*
2. investigetur longitudo rectarum *fA, fB, fC, fD, fE* (§. 109.).
 3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa, fb, fc &c.* juxta scalam modicam (§. 215.).
 4. Tandem ducantur *ab, bc, cd, &c.* Dico *abcdeg* esse figuræ *ABCLEG* similem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique $\triangle fab$ & fAB communis, estque $fa:fb = fA:fB$ per constr. Ergo anguli ad *a* & *A*, item ad *b* & *B* æquales sunt atque $fa:ab = fA:AB$ (§. 154.). Eodem modo ostenditur esse in $\triangle fga$ & fGA angulos ad *a* & *A* æquales, atque $fa:ag = fA:AG$, consequenter $ab:ag = AB:AG$ (§. 139. *arithm.*) & angulus $bag = BAG$ (§. 64. *arithm.*). Quare cum eadem ratione demonstretur, esse $g=G, e=E, d=D, c=C, b=B$ & $ag:ge = AG:GE; ge:ed = GE:ED, ed:dc = ED:DC, dc:cb = DC:$

CAP. V. DE FIG. DESCRIPTIONE. 329

$=DC: CB$ & $cb: ba=CB: BA$, figura $abcdeg$ est majori $ABCDEG$ similis (§. 148.). Q. e. d.

Aliter.

1. Collocato instrumento goniometrico in a investigetur quantitas angulorum x, m, r (§. 129.) & longitudo rectarum ab, ac, ad & ae (§. 109.). Tab. VII.
Fig. 86.
2. Construantur juxta scalam modicam $\triangle \triangle ABC, ACD$ & ADE (§. 151.). Dico $ABCDE$ esse similem figuræ $abcde$.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum secunda problematis præsentis.

Aliter.

1. Collocato instrumento goniometrico in f , investigetur quantitas angulorum $AfB, BfC, CfD, DfE, EfG, GfA$ (§. 129.) & longitudo rectarum fA, fB, fC, fD, fE, fG (§. 109.). Tab. VII.
Fig. 89.
2. Construantur, ut ante, juxta scalam modicam $\triangle \triangle bfa, agf, fge, efd, dfe$ & efb (§. 151.). Dico $abcdeg$ esse similem figuræ $ABCDEG$.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia problematis præsentis.

SCHOLIION.

Tab. VII. 281. *Ichnographia areae ABCDE ex duabus stationibus A & B etiam perfici potest.*

1. Posita nempe mensula in A collineatio fiat in singulos areae angulos B, C, D & E ducanturque rectæ versus eos ex a. 2. Queratur distantia stationum AB (§. 109) & in mensulam ex scala geometrica (§. 215.) transferatur in ab. 3. Mensula ex A deferatur in B, ita, ut punctum cognomine b in ea designatum ipsi B respondeat & regula ad lineam ba applicata per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat. 4. Ex puncto b in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores in e, d, c interfecant. 5. Denique jungantur puncta a & e, e & d, d & c, rectis ae, ed, dc. Ita, ichnographia erit absoluta.

Aliter.

Tab. VII. Fig. 91. 1. In A investigateur quantitas angulorum DAE, DAC & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC (§. 129.), quaraturque stationum distantia AB (§. 109.). 2. ducta in charta recta ab per scalam modicam distantia stationum AB convenienter determinetur (§. 215.). 3. in a constituentur angulis DAE, DAC, CAB aequales dae, dac, cab; in b vero ipsis ABE, EBD & DBC aequales abe, ebd & dbc (§. 131.). 4. Tandem puncta intersectionum B, C, D, E, a rectis conectantur. abode erit similis areae AB CDE.

PRO-

PROBLEMA XLV.

282. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragraré licet.*

RESOLUTIO.

1. Mensula in A collocata collineetur in Tab. vii. baculos in B & E defixos, ut angulo Fig. 91. BAE æqualis bæ in eadem designari possit.
2. Longitudo utriusque rectæ AB & AE (§. 109.) explorata ex scala minore transferatur in mensulam ex a in b & e (§. 215.).
3. Mensula in B translocetur ita, ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat & visus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto
4. Idem dirigatur pereasdem in C, quo, sicut ante, angulo ABC æqualis abc & rectæ BC proportionalis bc in mensula designari possunt.
5. Quodsi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in mensula delineata areæ propositæ similis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in mensula delineatæ sunt æquales singulis angulis areæ

areae & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sunt *per constr.* Figura igitur delineata est areae similis (§. 148.). *Q. e. d.*

Aliter.

Quærat^r longitudo omnium laterum (§. 109.) & quantitas tot angulorum, quot sunt latera, demistribus (§. 129.). His enim datis ichnographia *per probl.* (§. 278.), vi demonstrationis præcedentis, absolvetur.

PROBLEMA XLVI.

283. *Figurae in charta delineatae similem in campo designare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc problema est inversum alterius, quo ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus problematum immediate præcedentium intelligitur. E. gr. si semicirculo vel mensula & pertica utimur: anguli singuli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti &c. in solo designantur *per probl.* (§. 131.) & latera vel diagonales &c. per mensuram majorem decenter determinantur.



C A P U T VI.
D E
FIGURARUM DIMENSIONE
AC DIVISIONE.



P R O B L E M A XLVII.

284. *Invenire aream quadrati.*

R E S O L U T I O.

1. Quærat^{ur} longitudo lateris (§. 109.).
2. Hæc ducatur in seipsam.

Factum exprimit aream Quadrati.

Sit e. gr. Latus quadrati = 345"

$$\begin{array}{r} 345 \\ \times 345 \\ \hline 1725 \\ 1380 \\ \hline 1035 \end{array}$$

erit Area = 119025

D E M O N S T R A T I O.

Aream quadrati investigans quærit, Tab. VII. FIG. 92.
quot digiti quadrati, hoc est, quot quadratula digitum longa & lata in eodem
contineantur (§. 104.). Evidens vero est,
si latus quadrati AB concipiatur in quot-
cunque partes æquales & quadratum ip-
sum

sum per rectas puncta divisionum in lateribus oppositis connectentes in quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum series, quot partes habet latus AB & in qualibet serie tot reperiri quadratula, quot latus BC vel idem AB habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

285. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100. Cum igitur decempeda sit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 18.); pertica quadrata 100 pedes quadratos, pes quadratus 100 digitos quadratos &c. continet (§. 104.).

COROLLARIUM II.

286. Si latus quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare si pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos, &c. (§. 104.).

COROLLARIUM III.

287. Datus igitur numerus in priori casu facile in digitos, pedes & perticas quadratas resolvitur, si scilicet a dextra sinistram versus duæ notæ digitis, duæ pedibus refecentur: quæ enim sinistram versus residuæ sunt, perticis cedunt. E. gr. 119025. digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM IV.

288. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 134. *Arithm.*). E. gr. Quadratum lateris dupli est quadruplum quadrati lateris simpli. Et quadrata æqualia sunt, quorum latera æqualia sunt.

PROBLEMA XLVIII.

289. *Invenire aream rectanguli ABDC.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur longitudo laterum AB & AC (§. 109.). Tab. VII.
Fig. 93.
2. Ducatur AB in AC. Factum erit area rectanguli.

E. gr. Sit $AB=345''$

$AC=123$

1035

690

345

erit Area= 42435

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

COROLLARIUM I.

290. Rectangula sunt in ratione composita suorum laterum AB & AC (§. 134. *Arithm.*).

Co-

COROLLARIUM II.

291. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, quadratum mediæ rectangulo extremarum æquale est (§. 211. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

292. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; rectangulum sub extremis æquatur rectangulo sub mediis (§. 210. *Arithm.*).

THEOREMA LIII.

Tab. VII. 293. Duo parallelogramma $AB \cdot DC$
Fig. 94. & $ECDF$ super eadem basi CD & inter
easdem parallelas AF & CD constituta
sunt inter se æqualia.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD , itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi per *hypoth.* erit $AB = CD$ & $EF = CD$ (§. 257.), consequenter $AB = EF$ (§. 68. *Arithm.*) & hinc porro $AE = BF$ (§. 66. *Arithm.*). Quoniam porro $AC = BD$ & $EC = DF$ (§. 257.); erit $\triangle ACE = \triangle BFD$ (§. 167.), adeoque $ABGC = FECD$ (§. 69. *Arithm.*), consequenter $ABDC = EFDC$ (§. 66. *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

294. Quoniam AF & CD sunt parallelæ per *hypoth.* erunt perpendiculara inter eas intercepta æqualia (§. 69.): quæ cum sint altitudines pa-

CAP. VI. DE FIG. DIMEN. AC DIV. 337

parallelogrammorum (§. 101.): parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse (§. 293.).

COROLLARIUM II.

295. Ergo & triangula super eadem basi, Tab. VII. & ejusdem altitudinis æqualia sunt. Nam \square Fig. 94. $ACDB = \square ECDF$ (§. 294.), sed $\triangle ACD = \frac{1}{2} \square ACDB$ & $\triangle FCD = \frac{1}{2} \square ECDF$ (§. 259.). Ergo $\triangle ACD = \triangle FCD$ (§. 72. Arith.).

COROLLARIUM III.

296. Quodcunque adeo triangulum CFD est dimidium parallelogrammi $ACDB$ super eadem vel æquali basi CD & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam $\triangle CDF = \triangle ACD$ (§. 295.). Sed $\triangle ACD = \frac{1}{2} \square ACDB$ (§. 297.). Ergo $\triangle DCF = \frac{1}{2} \square ACDB$ (§. 65. Arith.).

PROBLEMA XLIX.

297. Invenire aream rhombi & rhomboidis seu parallelogrammi obliquanguli.

RESOLUTIO.

1. In CD pro basi assumtam demittatur Tab. VII. perpendiculum AE (§. 177.), quæ erit Fig. 95. altitudo parallelogrammi (§. 101.).
2. Multiplicetur basis per altitudinem. Factum erit area quærita,

Wolf. Mathes.

Y

E. gr.

E. gr. Sit $CD=4^{\circ}5'6''$ $AE=2\ 34$ $18\ 24$ $136\ 8$ 912 Erit Area $= 10^{\circ}67'04''$

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis AE (§. 294.). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 289.). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 65. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

298. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 116. *Arithm.*), adeoque & triangula eorum dimidia (§. 296.) in eadem existunt (§. 130. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

299. Ergo si altitudines sunt æquales basium; si bases æquales, altitudinum rationem habent (§. 130. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

300. Parallelogramma æqualia bases & altitudines reciprocant (§. 212. *Arithm.*).

THEOREMA LIV.

301. *Triangulum æquale parallelogrammo super eadem basi, sed dimidiæ altitudinis, itemque parallelogrammo super dimidia basi & ejusdem altitudinis.*

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque super eadem basi AB & intra easdem basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 293.) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 12. *Arithm.*).
 Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, assumpta AD pro basi; erit CD altitudo: sumta vero DC pro basi; erit AD altitudo (§. 101). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis per *hypoth.* & angulus ad D sit rectus (§. 77.) adeoque, ob EF & AB parallelas (§. 88.), is ad G similiter rectus (§. 182.), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 86.), & hinc $G=E$ (§. 122.); sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 132.): erit $\triangle CGH = \triangle EHA$ (§. 197.), consequenter $EGDA = \triangle ACD$ (§. 66. *Arithm.*). Q. e. d.

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendicularum DC in duo rectangula ADC & CDB resolvetur
 Y 2 (§. 66.)

(§. 66. 77.). Ergo si fiat $FB = DG$ dimidiæ altitudini; erit $DGFB = \triangle DCB$ & $AEFD = \triangle ACD$ per *cas.* I. Ergo $AEFB = \triangle ACB$ (§. 66. *Arithm.*). Quod erat unum.

Tab. VIII.
Fig. 97. Si $DK = KB = \frac{1}{2} DB$ & $GD = AG = \frac{1}{2} AD$; erit $GK = \frac{1}{2} AB$, adeoque dimidia basis. Jam $CFKD = \triangle DCB$ & $GECD = \triangle ACD$, per *cas.* I. Quare $EGKF = \triangle ACB$ (§. 66. *Arithm.*). Quod erat alterum.

PROBLEMA L.

302. Invenire aream Trianguli.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

- Tab. VIII.
Fig. 98.
1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD ; erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 297.).
 2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 296.).

Aliter.

Basis dimidia $\frac{1}{2} AB$ multiplicetur per altitudinem CD ; vel basis AB per altitudinem dimidiam $\frac{1}{2} CD$. Factum erit area trianguli (§. 301. 297.).

CAP. VI. DE FIG. DIMEN. AC DIV. 341

E. gr. $AB=3^{\circ}4'2''$	$AB=3^{\circ}4'2''$
$CD=234$	$\frac{1}{2}CD=117$
<hr/>	<hr/>
1368	2394
1026	342
684	42
<hr/>	<hr/>
80028	$\Delta 40014$

2) $\Delta ACB 40014$
 $\frac{1}{2} AB=1^{\circ}7'1''$
 $CD=234$

684
513
342

 $\Delta 40014$

COROLLARIUM I.

303. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 212. *Arithm.*), consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 127. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

304. Si area trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 144. *Arithm.*).

PROBLEMA LI.

305. *Invenire latus quadrati parallelogrammi, vel triangulo dato æqualis.*

RESOLUTIO.

Quærat inter basim & altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam basin

basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem trianguli media proportionalis (§. 249.) aut in numeris (§. 214. *Arithm.*). Ita prodit latus quadrati quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 289. 297.) & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 302.). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu factio isti æquale (§. 211. *Arithm.*); erit quadratum istud in priori casu parallelogrammo, in posteriori triangulo æquale. Q. e. d.

THEOREMA LV.

Tab. VII. 306. In parallelogrammis & triangulis
Fig. 95. similibus altitudines sunt lateribus homologis proportionales & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.

DEMONSTRATIO.

Cum altitudines AE & ae sint ad bases CD & cd perpendiculares (§. 101.); erunt E & e anguli recti (§. 66.), adeoque æquales (§. 122.). Et quia parallelogrammum $ABDC$ ipsi $abdc$; triangulum CA D ipsi cad simile, per *hypoth.* erit $C=c$ (§. 148.). Quare $AC: AE = ac: ae$ (§. 206.). Est vero etiam $AC: CD = ac: cd$ (§.

(§. 148.). Ergo $AE:CD=ae:cd$ (§. 139. *Arithm.*). Quod erat unum.

Quoniam $CD:AC=cd:ac$ (§. 148. 2) & ob $E=e$ & $C=c$ per demonstr. $AC:CE=ac:ce$ (§. 206.). Erit $CD:CE=cd:ce$ (§. 138. *Arithm.*) & $CD:cd=CE:ce$ (§. 121. *Arithm.*) adeoque $ED:ed=CE:ce$ (§. 127. *Arithm.*). Hinc tandem $ED:CE=ed:ce$ (§. 122. *Arithm.*). Quod erat alterum.

S C H O L I O N.

307. Patet quoque a priori. Quoniam enim $ABDC \cup abdc$ & $\triangle ACD \cup \triangle acd$ per hypoth. perpendiculara AE & ae , pariterque segmenta basium CE & ce , itidemque ED & ed eodem modo determinantur (§. 105. 177.), adeoque similia sunt (§. 106.). Cum adeo ea eadem sint, per quæ a se invicem discerni debebant (§. 19. *Arithm.*), lineæ autem rectæ, utpote similes (§. 12.), non aliter nisi ratione discerni possunt; tam perpendiculara, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent (§. 108. *Arithm.*). Eodem modo generaliter patet, rectas quæcumque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.

C O R O L L A R I U M I.

308. Quoniam parallelogramma & triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 298.), similia vero habent bases

altitudinibus proportionales (§. 307.); igitur parallel gramma & triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 116. *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum basium; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 307.).

COROLLARIUM II.

309. Quoniam data figura rectilinea quacunque, alia similis constructi possit, excitando nempe unum triangulum super altero (§. 277.). Hoc est determinando eodem modo latera homologa; patet quoque, figuras tam regulares similes, quam similes irregulares habere rationem duplicatam homologorum laterum, adeoque illas esse ut horum quadrata (§. 288.).

PROBLEMA LII.

Tab. VIII. 310. *Invenire aream polygoni irregularis ac trapezii.*
Fig. 99.

RESOLUTIO.

1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 302.).
3. Addantur. Erit summa area quaesita (§. 64. *Arithm.*).

E. gr.

CAP. VI. DE FIG. DIMEN. AC DIV. 345

$$\begin{array}{rcl}
 \text{E. gr. } \frac{1}{2}AD=43' & \frac{1}{2}AD & 43' \\
 EF=35 & GC=45 & BH=30 \\
 \hline
 215 & 215 & \triangle ABC 1260 \\
 129 & 172 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \triangle AED & 1505 & \triangle DAC 1935 \\
 & \triangle AED & 1505 \\
 & \triangle ABC & 1260
 \end{array}$$

Area polygoni irreg. 47°00'

Quodsi $\frac{1}{2}$ AD multiplicetur per sum-
mam altitudinum EF+GC, vel integra
AD per $\frac{1}{2}$ (EF+GC); prodibit area
trapezii AEDC.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{E. gr. } EF=35 & \frac{1}{2}AD=43 & \\
 GC=45 & EF+GC=80 & \\
 \hline
 EF+GC=80 & AEDC=3440 & \\
 \frac{1}{2}(EF+GC)=40 & & \\
 AD=86 & & \\
 \hline
 AEDC=3440 & &
 \end{array}$$

Similiter si in trapezio fuerit AB ipsi
CD parallela; erunt triangulorum al-
titudines BF & GC æquales (§. 69.
101.), consequenter trapezii area pro-
dit, ducta semisumma basium parallela-
rum AB & CD in altitudinem ejus BF
(§. 392.).

Tab. VIII.
Fig. 100.

E. gr. Sit $AB = 246''$, $CD = 378''$, $BF = 195''$

$$\text{erit } \frac{1}{2} (AB + CD) = 312$$

$$BF = 195$$

1560

2808

312

Area Trapezii 60840

THEOREMA LVI.

Tab. VIII. 311. *Figura regularis ABCDE ex*
 Fig. 102. *centro circuli circumscripti F in trian-*
gula æqualia atque similia resolvitur &
area ejus æquatur triangulo, cujus basis
peripheria totius polygoni AB + BC
+ CD &c. altitudo perpendicularum FG
ex centro F in latus unum AB demis-
sum. Idem valet de area circumscripti
abcde, nisi quod altitudo sit radius Fg.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB = BC = CD = DE = AE$
 (§. 92.) & $AF = FB = FC = FD = FE$
 (§. 32.); triangula $AFB, BFC, CFD, EFD,$
 AFE æqualia & similia sunt (§. 167.).
Quod erat unum.

Constituantur triangula $AFB, BFC,$
 CFD &c. in quæ resolutum est polygo-
 num $ABCDE$ super eadem recta AA
 (§. 164) Erigatur in A perpendicula-
 ris Af (§. 195.) ipsi altitudini triangu-
 lorum æqualis. Erit $AfB = AFB, BfC =$
 $BFC,$

BFC, Cfd=CFD&c. (§.295.), consequenter $AfA = AFB + BFC + CFD$ &c. (§. 66. *Arithm.*) æqualis est areæ polygoni regularis (§. 64.65. *Arithm.*). Quod erat secundum.

Cum recta Fg ex centro F ad contactum g ducta sit radius & ad latus ae perpendicularis (§. 232.); erit ea altitudo trianguli aFe (§. 101.). Reliqua patent ut ante. Quod erat tertium.

PROBLEMA LIII.

312. Invenire aream polygoni regularis.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Latus polygoni AB multiplicetur per Tab. VI. dimidium laterum numerum, e. gr. Fig. 84. latus hexagoni per 3.

2. Factum porro ducatur in perpendicularum HF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita prodit area quæsita (§. 302. 311.).

E. gr.

E. gr. $AB=5^{\circ} 4'$	
dimidius Numerus later.	$2\frac{1}{2}$
	<hr/>
	27
	<hr/>
	108
Semiperimeter	<hr/>
	135
FH =	<hr/>
	29
	<hr/>
	1215
	<hr/>
	270
Area Pentagoni	<hr/>
	$39^{\circ} 15'$

THEOREMA LVII.

313. *Circuli & figuræ similes ipsis inscriptæ vel circumscriptæ sunt inter se ut quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus describi duos circulos & iis circumscribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 105.). Sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. 106.). Cum adeo utrobique eadem sint, per quæ distingui debent (§. 19. *Arithm.*). Quadrata circulis circumscripta ad suos circulos eandem rationem habere debent. Quamobrem circuli inter se sunt ut quadrata diametrorum. (§. 122. *Arithm.*). Quod erat unum.

Eodem modo ostenditur, figuras similes circulis inscriptas esse ut circulos, quibus inscribuntur. Sed circuli sunt ut quadrata diametrorum, per demonstra-

strata. Ergo figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes sunt ut quadrata diametrorum (§. 117. *Arithm.*). Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

314. Habent ergo circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 288.), adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 31. *Geom.* & §. 130. *Arithm.*), & radiorum (§. 117. *Arithm.*)

THEOREMA LVIII.

315. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheriæ, altitudo radius æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales, adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui ab supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro c ad extrema arcus infinite parvi ab ducti radii cb & ca ; erit angulus acb infinite parvus, adeoque a & b non different a recto (§. 187.), consequenter si ab sumatur pro basi, radius ac erit trianguli abc altitudo (§. 101.). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero in-

Tab. VIII.
Fig. 101.

infinita, quorum altitudo communis est radius ac , bases vero junctim sumtæ sunt peripheriæ circuli æquales, per demonstrata; erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 311.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

316. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 298.). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 314.). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 116. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

317. Cum adeo sit ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 122. *Arithm.*); ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 31. *Geom.* & §. 127. *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

THEOREMA LIX.

Tab. VIII. 318. Sector circuli ACD æqualis est
Fig. 106. triangulo, cujus basis arcus AD , altitudo radius AC .

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentis (§. 315.).

THEOREMA LX.

Tab. VIII. 319. In triangulo rectangulo ABC
Fig. 104. quadratum hypotenuse AC æquale est
quæ.

quadratis laterum *AHIB* & *BCED* simul sumtis.

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ *AE* & *BF* (§. 107.), itemque *BK* ipsi *CF* parallela (§. 202.). Quoniam $\triangle ACE$ cum quadrato *CEDB* super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 258.) existit; hujus dimidium est (§. 296.). Ex eadem ratione $\triangle BCF$ est dimidium parallelogrammi *LCFK*. Enimvero quia $x=0$ (§. 84. 122.), adeoque $x+y=0+y$ (§. 66. *Arithm.*), $BC=CE$ & $AC=CF$ (§. 84.); ideo $\triangle ACE=\triangle BCF$ (§. 150.), consequenter $BCED=LCFK$ (§. 71. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse $AHIB=ALKG$. Quamobrem $BCED+AHIB=LCFK+ALKG$ (§. 66. *Arithm.*) $=ACFG$ (§. 64. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

320. Hoc theorema Pythagoras invenit: unde Pythagoricum dicitur. Amplissimè per *Mathesin* universam est usus: ideo ab illius auditoribus hecatombe, hoc est, centum boum sacrificia redemptum fertur.

COROLLARIUM I.

321. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1. latera duorum *AC* & *AB* jungantur ad angulos rectos (§. 195.); 2. super ducta hypotenusa

Tab. VIII.
Fig. 105.

DC

BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. cit.) ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & $BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 319.). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. 322. Quodsi AB fuerit = 1 & AC = 1;
Fig. 103 erit $CB = \sqrt{2}$. Si porro fiat $AD = CB = \sqrt{2}$; erit $DB = \sqrt{3}$. Si fiat $AE = 2$; erit $BE = \sqrt{5}$. Si fiat $AF = EB = \sqrt{5}$; erit $FB = \sqrt{6}$ & ita porro infinitum. Omnes adeo radices quadratæ surdæ sunt ad unitatem, ut linea recta ad aliam rectam, consequenter numeri (§. 7. *Arithm.*); lique irrationales (§. 29. 209. *Arithm.*),

COROLLARIUM III.

323 Cum CB sit diagonalis Quadrati (§. 97.); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 322.); adeoque unitati incommensurabilis (§. 29. *Arithm.*), consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

PROBLEMA LIV.

Tab. VIII.
Fig. 106.

324. Datis chorda AB & radio AC invenire chordam arcus dimidii AD.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bise-
cat in D per *hypoth.* etiam chordam AB
bifecat & ad eam perpendicularis (§.
225).

225.), adeoque anguli ad E recti sunt (§. 66.). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 319.).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 190. *Arithm.*), quæ erit EC.
3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 319.).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 190. *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

E. gr. Sit radius $AC = 10000$ & AB latus hexagoni; erit AB itidem 10000 (§. 274.) & $AE = 5000$.

Quare

$AC^2 = 100000000$	$AE^2 = 25000000$
$AE^2 = 25000000$	$ED^2 = 1795600$
$CE^2 = 75000000$	$DA^2 = 26795600$
$CE = 8660$	$DA = 5176$
$DC = 10000$	
$DE = 1340$	

PROBLEMA LV.

325. Dato latere polygoni regularis Tab. VIII. inscripti AB invenire latus circumscrip. Fig. 107. ti FG.

Wolf Mathes.

Z

RE.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB & DC chordam AB bisariam dividit (§. 273.); erit $AE = \frac{1}{2} AB$ & $EC : AE = CD : DG$ (§. 207.). Quare si ob angulum rectum ad E (§. 225.) EC investigetur, ut in problemate precedente; reperietur LG (§. 215. *Arithm.*), ejus duplum est latus polygoni circumscripti F-G. Est enim $EC : CD = EA : DG$ & $EC : CD = EB : FD$ (§. 207.). Cum adeo sit $EA : DG = EB : FD$ (§. 117. *Arithm.*) & $EA = EB$ per demonstrata; erit etiam $DG = DF$ (§. 126. *Arithm.*), adeoque $FG = 2 DG$. Q. e. i. & d.

E. gr. Sit $DC = AB = 10000$; erit $AE = 5000$ & $EC = 8660$ (§. 324.), adeoque $LG = 5773$. Hinc $FG = 11546$.

PROBLEMA LVI.

326. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 324.), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invenio hoc latere quærat per porro latus polygoni similis circumscripti (§. 325.).

3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimenter polygoni tam inscripti, quam circumscripti (§. 92.).

Erit perimenter polygoni circumscripti major, inscripti vero minor peripheria circuli. Differentia vero inter utramque perimetrum cognita haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

E. gr. Archimedes excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inscripta & circumscripta, & polygonis 96. laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse, ut 7 ad 22. fere. Nimirum si diameter 1, perimenter polygoni inscripti reperitur $3\frac{1}{7}$; perimenter vero circumscripti $3\frac{1}{7}$. Ejus vestigiis insistentes posteri rationes propiores investigant. Nemo autem plus operæ impendit Ludolpho a Ceulen, qui tandem reperit, pos. a diametro 1, peripheriam esse majorem quam 3. 14159 265358979323846264338387950, sed minorem quam idem numerus, ciphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam ut 100 ad 314, vel in circulis majoribus ut 10000 ad 31415. Perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, ut ut, nostra praesertim aetate, ars inveniendi egregie promota fuerit.

COROLLARIUM.

327. Si diameter fuerit 113; erit peripheria (113. 31415): 10000 (§. 215. *Arithm.*) hoc est: 355 quam proxime. Quæ proportio Metiana inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima.

PROBLEMA LVII.

328. *Data Diametro circuli invenire peripheriam & aream ejus, & data peripheria diametrum.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 326. 327.); una data, invenietur altera (§. 215. *Arithm.*).
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 315. 302.).

E. gr. Sit diameter 56'; erit

$$\begin{array}{r}
 100 - 314 = 56' \text{ Periph: } 17584''' \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 56 \qquad \frac{1}{4} \text{ Diam.} \qquad 1400 \\
 1884 \qquad \qquad \qquad 7033600 \\
 1570 \qquad \qquad \qquad 17584
 \end{array}
 \end{array}$$

Per. 17°5'8"4''' Area 24°61'76"00'''

COROLLARIUM I.

329. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 326.), adeoque area circuli 7850 (§. 328.). Est vero quadratum diametri 10000 (§. 284.): ergo hoc ad aream circuli ut 10000

CAP. VI. DE FIG. DIMEN. AC DIV. 357

10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785
(§. 130. *Arithm.*) quam proxime.

COROLLARIUM II.

330. Area igitur circuli etiam invenitur,
si ad 1000; 785 & quadratum diametri nume-
rus quartus proportionalis quærat (§. 215.
Arithm.).

Sit e. gr. diameter 560''; erit quadratum
ejus 31° 36' 00'', Quare

$$\begin{array}{r}
 1000 - 31^{\circ} 36' 00'' - 785 \\
 \hline
 785 \\
 1568000 \\
 25088 \\
 21952 \\
 \hline
 24^{\circ} 61' 76'' \quad \text{Area circuli,}
 \end{array}$$

COROLLARIUM III.

331. Si area circuli minoris GEHF sub- Tab VIII.
trahatur ex area majoris concentrici ADBC; Fig. 109.
relinquitur annulus ADBCGEHF.

PROBLEMA LVIII.

332. Data area circuli, invenire dia-
metrum.

RESOLUTIO.

I. Quærat ad 785, 1000 & aream
circuli datam 246176 numerus quar-
tus proportionalis 313600 (§. 215.

Z 3

Ari-

Arithm.): qui est quadratum diametri (§. 329.).

2. Inde extrahatur radix quadrata (§. 190. *Arithm.*): quæ est diameter (§. 171. *Arithm.* & §. 284. *Geom.*).

PROBLEMA LIX.

Tab. VIII. 333. Dato radio circuli AC una cum
Fig. 106. ratione arcus AB ad peripheriam, invenire aream sectoris ACB.

RESOLUTIO.

1. Quærat ad 100, 314 & radius AC numerus quartus proportionalis (§. 215. *Arithm.*): quæ est semiperipheria (§. 326. *Geom.* & §. 130. *Arithm.*)
2. Quærat porro ad 180° , arcum datum AB & semiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 215. *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem mensura, in qua radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in semiradium.
Factum exprimet aream sectoris (§. 318. 302.).

E. gr. Sit radius 6'; arcus 60° ;

$$100 - 314 - 500''$$

6

Semiperiph. 1884 | 00

$$180 - 1884 - 60$$

$$60 \left. \begin{array}{l} 3 \text{ --- } 1 \\ 628'' = AB \end{array} \right\}$$

$$300 = \frac{1}{2} AC$$

Area Sectoris ACB 1884'' (00

PROBLEMA LX.

334. Datis altitudine segmenti DE & Tab. VII.
dimidia basi AE, invenire aream ejus. Fig. 106.

RESOLUTIO.

1. Quærat diameter (§. 250.).
2. Describatur circulus (§. 110.) & in eo applicetur basis segmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC & ope instrumenti transportatorii investigetur numerus graduum arcus ADB (§. 129.).
4. Dato jam radio AC una cum arcus ADB ad peripheriam ratione investigetur area sectoris ACB (§. 333.), &
5. ex chorda AB atque altitudinis segmenti DE complemento ad radium EC area trianguli ACB (§. 302.).
6. Hoc denique ex illo auferatur: residuum erit segmentum ADBEA.

E. gr. Sit $AE = 300''$, $DE = 80''$; erit DP
 $= 1205''$ (§. 250.), arcus AB $= 60^\circ$ (§.

360 ELEMENTA GEOMETRIÆ

129.). Ergo area sectoris ADBC $18'84''$ (§. 333.). Jam $EC=5'22''$ $AE=300'''$ Quare $\triangle ACB=156750'''$, consequenter segmentum AEBDA $31650'''$.

COROLLARIUM

Tab. VIII.
Fig. 106.

335. Quodsi segmentum majus BFA quadratur; triangulum BCA sectori BFACB addendum.

PROBLEMA LXI.

Tab. VIII.
Fig. 108

336. Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes æquales dividere.

RESOLUTIO.

Fiat $EF=AD$ & ducatur recta DF; erit $ADFC=DBEF$.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE; erit $o=x$ (§. 132.) & ob parallelas AB & EC (§. 88.) $y=u$ (§. 182.). Sed $AD=FE$, per constr. Ergo $\triangle ADG=\triangle FGE$ (§. 197.). Est vero $\triangle ACE=\triangle AEB$ (§. 259.). Quare $ACG=DBEG$ (§. 69. Arithm.), consequenter $ADFC=DBEF$ (§. 66. Arithm.). Q. e. d.

PROBLEMA LXII.

337. Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque æquales dividere.

RE.

RESOLUTIO.

1. Dividatur basis CD in tot partes æ- Tab. IX.
quales, in quot figura dividenda (§. Fig. III.
211.). 113;
2. In parallelogrammo ducantur rectæ
1. 1, 2, 2; in triangulo A 1. A 2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A 1. 1 C,
1. 2. 2. 1, 2 BD 2 inter easdem paral-
lelas AB & CD existunt (§. 88.); ean-
dem altitudinem habent (§. 69. 101.).
Sunt itaque in basium ratione (§. 299.),
consequenter ob $C 1 = 1 \quad 2 = 2$. D, *per*
constr. æquales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem re-
ctam CD perpendicularis nonnisi unica
duci possit, triangula AC 1, 1 A 2, 2 AD
eandem altitudinem (§. 101.); adeoque
basium rationem habent (§. 299.). Sed
bases æquales sunt *per constr.* Ergo &
triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LXIII.

238. *Figuram rectilineam quamcunque* Tab. IX.
ABCDE in partes æquales dividere. Fig. 112.

RESOLUTIO.

1. Quærat^r area figuræ (§. 310.) & di-
vidatur in tot partes æquales, in quot
figura dividi debet, e. gr. in 3.

2. Area partis, in nostro casu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED subtrahatur a parte tertia & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AED sit pars tertia figuræ (§. 304.).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi AD (§. 202), quæ secabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abscindentem.
5. Pars tertia, dimidia, sive sexta totius figuræ dividatur per $\frac{1}{3}$ DI, quotus erit altitudo trianguli IKD sextam figuræ partem constituentis (§. 304.).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 202.).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{3}$ KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD sextæ iidem parti figuræ æqualis (§. 304.).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi KD parallela (§. 202.), ut punctum L determinetur ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL resecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda, eodem modo ulterius procedendum.

SCHOLION I.

339. Si AED majus *tertia* e. gr. parte figure; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo AED auferendum, ut *tertia* parti figure equalis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars $AEDI$ per duo triacula uti cetera determinetur.

SCHOLION II.

340. Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta I, K, L per quantitatem restarum AI, IK & DL facile determinantur (§. 109.).

PARS POSTERIOR
ELEMENTA GEOMETRIÆ
SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT I.

DE

PRINCIPIUS GEOMETRIÆ
SOLIDÆ.

DEFINITIO I.

341. Solidum sive corpus est magnitudo tribus dimensionibus prædita, seu extensum in longitudinem, latitudinem atque profunditatem.

DE.

DEFINITIO II.

Tab. IX. 342. *Angulus solidus B est plurium
Fig. II5. quam duarum linearum AB, BC, BF
in eodem puncto B concurrentium, nec
in eodem plano constitutarum ad omnes
incl natio. Dicuntur autem anguli so-
lidi æquales, qui inter se invicem positi
congruunt.*

COROLLARIUM I.

343. Ergo angulus solidus B pluribus
quam duobus planis in eodem plano non con-
stitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

344. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad
angulum solidum constituendum requiruntur
(§. 342.); tres minimum anguli plani ad so-
lidum constituendum necessarii.

COROLLARIUM III.

345. Si anguli plani in eodem puncto con-
currentes conficiant summam 360 graduum;
planum circuli sternunt (§. 33. 45.), adeoque
solidum angulum non constituunt (§. 343.).
Quare, summa eorum, qui ultra solidum non
assurgunt, quatuor rectis seu 360° (§. 121.)
minor esse debet.

DEFINITIO III.

346. *Corpus regulare est solidum pla-
nis regularibus & inter se æqualibus ter-
mi-*

minatum totidem numero ad angulos
constituendos concurrentibus. Reliqua
corpora dicuntur *irregularia*.

DEFINITIO IV.

347. Si figura rectilinea ACB juxta Tab. IX.
ductum lineæ rectæ AE motu sibi sem- Fig. 114.
per parallelo deorsum feratur, *Prisma*
ABCFDE describit: & quidem *rectum*,
si linea directrix AE fuerit ad planum
describens perpendicularis seu in nul-
lam partem inclinatur, *obliquum* vero,
si ea ad idem fuerit obliqua. In specie
Prisma dicitur *triangulare sive trigonum*,
si planum describens fuerit triangulum,
quadrangulare, si fuerit figura quadrila-
tera & ita porro.

COROLLARIUM I.

348. Quodlibet adeo prisma habet duas ba-
ses oppositas ABC & EDF æquales & circum-
circa terminatur tot parallelogrammis, quot
basis latera habet. (§. 347. 88.).

COROLLARIUM II.

349. Plana sectionum prismatis basi ACB
parallele factarum sunt inter se æqualia. Æ-
quantur enim plano describenti ACB (§. 347.
Geom. & §. 60. *Arithm.*), ergo & inter se æqua-
lia sunt (§. 65. *Arithm.*).

DEFINITIO V.

350. Si planum describens ABCD fue- Tab. IX.
rit quadratum & linea dirigens AE la- Fig. 115.
teri

teri ejus AB æqualis, atque angulus BAE & DAE rectus; *Cubus* describitur.

COROLLARIUM I.

351. Cubus terminatur, sex quadratis inter se æqualibus: est enim $ABCD = EFGH$ (§. 350. *Geom.* & §. 60. *Arithm.*). Cum ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 181.), consequenter ABFE quadratum (§. 260.), ipsi ABCD æquale (§. 288.). Eodem modo ostenditur: reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

352. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 350. *Geom.* & §. 60. *Arithm.*), consequenter etiam æqualia inter se (§. 65. *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

353. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur.

COROLLARIUM I.

354. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 60. *Arithm.*), adeoque & æqualia inter se (§. 65. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

355. Cum LM & NO itemque MO & LN sint æquales & inter se parallelæ (§. 347. 353. *Geom.* &

Tab. IX.
Fig. 117.

& §. 60. *Arithm.*); erit LMNO parallelogram-
mum (§. 38.). Eodem modo patet, plana
terminantia reliqua esse parallelogramma. Ter-
minatur adeo parallelepipedum sex parallelo-
grammis, quorum bina opposita inter se æ-
qualia sunt.

DEFINITIO VII.

356. Si circulus AB juxta ductum re-
ctæ AD motu sibi semper parallelo deor-
sum feratur, *Cylindrus* describitur; *re-*
ctus quidem, si recta CF, quam pun-
ctum C, in descensu describit centra ba-
sium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur,
fuerit ad bases perpendicularis; *scalenus*
vero, si ad angulos obliquos iisdem infi-
stat. Quodsi parallelogrammum rectan-
gulum CBEF circa latus unum CF gyre-
tur; *cylindrum* describit *rectum*.

Tab. IX.
Fig. 118.

COROLLARIUM.

357. Sunt ergo non modo bases cylindri
AB & DE æquales; verum etiam sectiones
basibus parallelæ sunt circuli eisdem & inter
se æquales.

DEFINITIO VIII.

358. Si recta quædam KM in peri-
pheria circuli NM ita incedat, ut con-
stanter inhæreat puncto fixo K: descri-
betur *Conus* NKM. Recta ex puncto K,
qui *vertex* conï dicitur, ad centrum basis
L ducta dicitur, *Axis conï*: qui si ad
ba.

Tab. IX.
Fig. 116.

basin Coni NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insilat, *scalenus*. Linea describens KM seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta vocatur *Latus Coni*.

Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur; *Conus* describitur *rectus*.

COROLLARIUM.

359. Quodsi PQ ipsi LM parallela; per ultimam coni genesin erit $KP : KL = PQ : LM$ (§. 207.). Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum: planum sectionis basi coni parallele factæ circulus est eadem minor.

DEFINITIO IX.

Tab. IX.
Fig. 120.

360. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* describitur, diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphærae*, centrum C etiam *Centrum Sphærae*.

COROLLARIUM.

361. Omnes ergo rectæ ex sphærae superficie in centrum ductæ sunt inter se æquales (§. 32.).

DEFINITIO X.

Tab. IX.
Fig. 119

362. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, DCB &

& ABD in uno puncto D coëuntibus, quot basis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

363. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CBI BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC: Dc=CA: ca=CB: cb (§. 207.), adeoque CA: ca=CB: cb (§. 117. *Arithm.*), consequenter, cum eodem modo ostendi possit, esse CA: ca=AB: ab, erit triangulum acb simile triangulo ACB (§. 170.). Quare, si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM II.

364. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvipotest, quot sunt latera basis, demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 363.), consequenter cum vi demonstrationis, primæ problematis (§. 280.) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO XI.

Tab. IX. 365. *Tetraëdron* est solidum quatuor;
 Fig. 121. *Octaëdron* est solidum octo; *Icosaëdron*
 122. 124. est solidum viginti triangulis æquilateris
 123. & æqualibus comprehensum; *Dodecaëdron* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum.

THEOREMA I.

366. *Cubus, Tetraëdron, Octaëdron, Dodecaëdron & Icosaëdron sunt corpora regularia, nec præter hæc quinque aliud possibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus sex quadratis, tetraëdron quatuor, octaëdron octo, icosaëdron viginti triangulis regularibus, dodecaëdron denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 351. 365.). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 346.). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icosaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad solidum efficiendum concurrunt. (§. 365.). Quoniam vero summa 6 istiusmodi angulorum est 360° (§. 190.); triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri potest (§. 345.). In cubo tres anguli quadrati solidum efficiunt (§. 350.).
 Qua

CAP. I. DE PRINCIP. GEOM SOLIDÆ. 371

Quare cum summa quatuor istiusmodi
angulorum sit 360° (§. 84. 121.); qua-
dratis nullum corpus continetur nisi cu-
bus. In dodecaëdro tres anguli penta-
goni regularis solidum constituunt (§.
365.). Quia vero summa quatuor est 432°
& summa trium in hexagono regulari 360°
atque in reliquis figuris regularibus 360°
major (§. 266.), ad angulum vero soli-
dum constituendum minimum tres plani
requiruntur (§. 344.); pentagonis regu-
laribus nonnisi dodecaëdram, figuris
vero plurium laterum nullum corpus
terminari potest. Corpora igitur regula-
ria nonnisi quinque sunt. Quod erat
alterum.

C A P U T II.
D E
DIMENSIONE SOLIDORUM.

DEFINITIO XII.

367. *Mensura solidi est cubus, cujus
latus perticæ unius, diciturque Pertica
cubica* Hæc dividitur in *Pedes, Digitos,*
&c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum
latus, pedem digitum &c. adæquat.

PROBLEMA I.

368. *Superficiem ac soliditatem Cubi determinare.*

RESOLUTIO.

- I. Cum superficies cubi ex sex quadratis aequalibus componatur (§. 351.); latus cubi in seipsum ducatur & factum per 6 multiplicetur (§. 284.).
- Tab. X. II. Quodsi Idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.
- Fig. 127.

Sit e. gr. latus cubi AB 2° 7' 4".

$$AB = 274 \quad \text{Basis} = 75076$$

$$\begin{array}{r} 274 \\ \hline 1096 \end{array} \quad \begin{array}{r} AB = 274 \\ \hline 300304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1096 \\ \hline 1918 \end{array} \quad \begin{array}{r} 300304 \\ \hline 525532 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1918 \\ \hline 548 \end{array} \quad \begin{array}{r} 525532 \\ \hline 150152 \end{array}$$

$$ABDC = 75076 \quad \text{Solidit. } 20^{\circ} 57' 0824''$$

6

$$\text{Superfic. } 45^{\circ} 04' 56''$$

DEMONSTRATIO.

Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. aequalia (§. 367.): soliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodsi jam latus in partes quotcunque æquales divisum concipiamus, tot erunt cuborum ordines, quot in latera AB partes & in quolibet ordine

totidem existent, quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§. 284.), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. Q. e. d.

COROLLARIUM. I.

369. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum &c (§. 18.); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est $20^{\circ}57'0''824''$. Similiter cum pertica Rhenana sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 divides per 2728, quotus erit $11904'$ & $712''$. Quod si $11904'$ porro divides per 1728; quotus erit 6° & 1536, adeoque habebis 6° , 1536' & 712''.

COROLLARIUM. II.

370. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 116. *Arithm.*) & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA. II.

371. *Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitie quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 354. 349. 357.); bases vero illorum corporum inter se æquales sunt, *per hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 65. *Arithm.*), consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt. (§. 66. *Arithm.*).
Q. e. d.

PROBLEMA II.

Tab. IX. 372. *Metiri superficiem ac soliditatem*
 Fig. 117. *parallelepiedi.*

RESOLUTIO.

1. Quærat^{ur} area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 289. 297.).
2. Addant^{ur} in unam summam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepiedi (§. 355.).
3. Quodsi basis POMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

CAP. II. DE DIMENS. SOLIDORUM. 375

Sit e. gr. $LM=36'$, $MK=15'$, $MO=12'$
& parallelepipedum rectangulum.

$LM=36'$	$LM=36'$	$MK=15'$
$MK=15'$	$MO=12'$	$MO=12'$

	180	72	30
	36	36	15
OPKM	180	LMON 432	MOKP 180
	ML 36	LIK 540	
	1080	MOKP 180	
	540	1152	
		2	

Solid. $6^{\circ}480'$

$23^{\circ}04'$ Superficies.

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem
valet demonstratio, qua in probl.
(§. 368.) usi sumus. Cum vero obliquan-
gulum æquetur rectangulo super eadem
basi & ejusdem altitudinis (§. 371.);
ducta basi in altitudinem habetur quo-
que soliditas obliquanguli. Q. e. d.

THEOREMA. III.

373. Planum diagonale *AHFD* di- Tab. X.
vidit parallelepipedum *ABDCEFG* in Fig. 128,
duo prismata *ADCEFH* & *ADBGFH*
inter se æqualia.

DEMONSTRATIO.

Diagonalis *AD* dividit parallelogram-
mum *CABD* in duo triangula æqualia

Aa 4

ACD

ACD & DBA (§. 259.). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum DF, perpendicularis ad planum ACDB (§. 353.), sit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC; eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 101.), & ipsa itidem æqualia sunt (§. 371.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

374. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedum super dupla basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA III.

475. *Metiri superficiem ac soliditatem prismatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæraturs basis (§. 302. 310. 312.) & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro area parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium & earum summa addatur facto antecedenti.

Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 348.).

- Tab. IX. 3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD
fig. 114. multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas.

E. gr.

E. gr. Sit $BC = 4^{\circ} 3' 2''$, $AG = 3^{\circ} 5' 7''$
 $CD = 8^{\circ} 6' 9''$.

$$\frac{1}{2}BC = 216'' \quad AC = 432''.$$

$$AG = 357 \quad CD = 869$$

$$\begin{array}{r} 1512 \\ 1080 \\ 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ 648 \end{array}$$

$$648$$

$$\begin{array}{r} 3888 \\ 2592 \\ 3456 \end{array}$$

$$2592$$

$$3456$$

$$\text{Basis } 77112$$

$$ACDE$$

$$375408$$

$$CD \quad 869$$

$$3$$

$$\begin{array}{r} 1126224 \\ 694008 \end{array}$$

$$694008$$

$$2ABC$$

$$154224$$

$$462672$$

$$616896$$

$$\text{Superfic.} = 1280448$$

$$67^{\circ} 01' 0328'' \text{ Solidit.}$$

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedum super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 374.). Quod si vero dupla basis, hoc est, parallelogrammum multiplicetur per altitudinem; soliditas parallelepipedum prodit (§. 372.). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedum dimidium, hoc est, prisma soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. Q. e. d.

SCHOLION.

276. In exemplo nostro assumimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis, parrallelogramma lateralia inæqualia sunt, adeoque area unius cujusque singillatim invenienda. Hæc & multa alia, quæ de corporibus, & eorundem superficiebus demonstrantur, captui tyronum magis accommodantur, si corpora ex ligno, aut charta compacta parentur. Ita etiam quinque corpora regularia (§. 366.) distinctius concipient, si in charta ex pluribus foliis compacta pro construendo cubo sex quadrata æqualia; pro Tetraëdro quatuor; pro Octaëdro octo; pro Icosaëdro viginti triangula regularia & æqualia; pro Dodecaëdro vero duodecim Pentagona regularia & æqualia delineentur, excindantur & debito modo conglutinentur.

THEOREMA IV.

Tab. IX. 377. Superficies cylindri recti seclusis
Fig. 126. basibus æqualis est rectangulo sub periphæria & altitudine cylindri.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus, ut pro linea recta haberi possit, ducanturque rectæ EG & FH inter se parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipsi GH parallelus (§. 356.); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipsi EFGH æqualia resol-

vitur, quorum communis altitudo est EG seu altitudo cylindri, bases vero junctim sumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine cylindri (§. 299.). Q. e. d.

PROBLEMA IV.

378. Data diametro AB & altitudine cylindri CF; invenire superficiem ac soliditatem ejus. Tab. IX.
Fig. 118.

RESOLUTIO.

1. Quærat peripheria baseos & basis ipsa (§. 328.), hæcque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies seclusis basibus (§. 377.).
3. Quare si eidem addatur factum antecedens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

Ex gr.

E. gr. Sit $AB=5^{\circ}6'$, $CF=24^{\circ}6'$: erit periphēria $=17584''$

$$CF = 24600''$$

$$10550400$$

$$70336$$

$$35168$$

Sup. absq; Bas. $4325664'' | 00$

Dupl. Bas. 492352

Superfic. $481^{\circ}80'16''$

$$\text{Basis} = 246176''$$

$$CF = 2460''$$

$$14770560$$

$$984704$$

$$492352$$

Solid. $605^{\circ}592'960''$

DEMONSTRATIO.

Cum circulus æqualis sit triangulo, cujus basis periphēria, altitudo radius (§. 315.); cylindrus æqualis erit prismati triangulari eandem cum ipso altitudinem & basin æqualem habenti (§. 371.). Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 375.).
Q. e. d.

THEOREMA V.

Tab. X. 379. *Pyramides & Coni super eadem*
Fig. 130. *basi & ejusdem altitudinis sunt æquales.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 202.): erit $IK=LM$ (§. 69.): adeoque ob $CK=DM$ *per hypoth.* $CI=DL$ (§. 69. *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ & $\triangle DGH \sim \triangle DAB$ (§. 207.): erit $CI:CK=EF:AB$ & $DL:DM=GH:AB$ (§. 306.). Sed $CI=DL$ & $CK=DM$, *per demonstr.* Ergo $EF:AB=GH:AB$ (§. 117. *Arith.*), consequenter $EF=GH$ (§. 126. *Arithm.*). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 364.), consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2 & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 309.). Quare cum $EF=GH$ *per demonstr.* planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 119. *Arithm.*), consequenter plana ista inter se æqualia sunt (§. 126. *Arithm.*). Igitur & disci quantumlibet exiguæ crassitie in eadem a basi distantia inter se æquantur (§. 371.). Quoniam itaque
ob

ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt, quot ex altera; pyramis una alteri æqualis fit necesse est (§. 66. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 359.). Cum adeo diametri adeoque circuli isti æquales sint, eodem, quo ante, modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

380. *Prisma triangulare in tres pyramides æquales dividi potest.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X.
Fig. 131.

Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 347.), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem atque bases ACB & DFE æquales (§. 348.). Sunt ergo æquales (§. 379.). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 348.), $\triangle CFB = \triangle BFE$ (§. 259.). Habent adeo pyramides ABCF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem in A habent, pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent, consequenter

ter æquales sunt (§. 379.). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87. *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

381. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM II.

382. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest, quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 135. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

383. Quia conus pro pyramide infinitangula haberi potest & cylindrus pro prismate infinitangulo, conus pars tertia est cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

THEOREMA VII.

384. *Superficies coni recti seclusa basi æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo latus coni.*

Tab. IX.
Fig. 125.

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur, cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 187.).
est.

estque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 66.), consequenter trianguli KML altitudo (§. 101.). Sed coni recti superficies in innumera istiusmodi triangula inter se æqualia resolvitur (§. 358. 196.). Ergo integra coni recti superficies æqualis est triangulo, cujus altitudo lateri, basis peripheriæ coni æqualis (§. 299.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

385. Superficies coni recti æquatur sectori circuli latere coni tanquam radio descripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 318.), adeoque ad suam peripheriam eam rationem habet, quam semidiameter basis ad latus coni (§. 316. *Geom.* & 117. *Arithm.*).

PROBLEMA V.

386. Metiri superficiem ac soliditatem pyramidis & coni.

RESOLUTIO.

Quærat^r soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin habentis (§. 375. 378.), inventaque per 3. dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§. 382. 383.).

E. gr. Si soliditas prismatis fuerit 67010328'', ut in probl. (§. 375.). erit soliditas pyramidis 22336776''. Si soliditas cylindri fuerit 605592960'' ut in probl.

probl. (§. 378.); erit soliditas coni
201864320".

Superficies pyramidis habetur, si tam Tab. IX.
basis ABC, quam triangulorum la- Fig. 119.
teralium ACD, CBD, BDA areae inve-
stigentur (§. 302.) atque in unam sum-
mam colligantur.

Coni denique recti superficies prodit,
peripheria baseos in latus ejus dimidium
ducta (§. 384.) & basi, qui circulus est,
eidem addita.

E. gr. Sit diameter coni $NM=56'$; erit Tab. IX.
peripheria $17584''$, basis $246176''$ (§. 328.) Fig. 116.
Sit altitudo $KL=246'$. Quoniam $LM=\frac{1}{2}$
 $NM=28'$ & $KM^2=KL^2+LM^2=60516$
 $+784=61300'$ (§. 319.); erit $KM=2475''$
(§. 190. *Arithm.*), consequenter superficies
coni seclufa basi $2176020''$ & hinc integra
 $2422196''$.

PROBLEMA VI.

387. *Metiri superficiem ac soliditatem* Tab. X.
coni truncati; datis ejus altitudine CH Fig. 132.
& diametris basium AB & CD.

RESOLUTIO.

1. Datīs diametris basium CD & AB in-
veniantur peripheriæ (§. 328.).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur
quadratum differentię radiorum AH
& ex aggregato extrahatur radix (§.
190. *Arithm.*), ut habeatur latus AC
(§. 319.).

Wolf. Mathes.

B b

3. Se

3. Semmisumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Productum erit superficies conii truncati seclusis basibus.

Sit e. gr. $AB=8'$, $CD=6'$, $CH=10'$;
erit $AH=1'$

$$100-314-8'$$

$$8$$

$$2512'' \text{ periph. maj.}$$

$$CH^2=100'$$

$$AH^2=1$$

$$AC^2=101$$

$$\text{Ergo } AC=1005''' \text{ fere.}$$

$$100-314-6'$$

$$6$$

$$1884'' \text{ Periph. min.}$$

$$2512 \text{ Periph. maj.}$$

$$4396 \text{ Summa.}$$

$$2198 \text{ Semisumma.}$$

$$1005 \text{ AC}$$

$$10990$$

$$219800$$

$$2^{\circ}20'89''90''' \text{ Superfic. conii trunc.}$$

DEMONSTRATIO.

Tab. X.
Fig. 133.
n. 1, n. 2

Superficies conii truncati relinquitur, si superficies conii minoris ECD a superficie maioris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis HI peripheria diametro CD

de-

descripta, altitudo MK, latus EC: superficies majoris vero triangulo, cujus basis NO peripheria diametro AB descripta, altitudo ML, latus AE (§. 384.). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie conii truncati trapezium parallelarum basium HION, cujus quidem bases HI & NO peripheriis diametris CD atque AB descriptis æquales sunt, altitudo KL vero latus AC existit. Habetur igitur superficies conii truncati, seclusis basibus, semisumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 310.). *Q. e. d.*

II. Demissa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam sit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (§. 358.), erunt CH & EF parallelæ (§. 200.). Quamobrem cum bases CD & AB sint parallelæ *per hypoth.* erunt semidiametri CG & AF parallelæ, consequenter $CG = HF$ & $CH = FG$ (§. 69.).

Soliditatem adeo conii truncati inventurus.

1. Inferat (§. 207.): ut differentia semidiametrorum AH ad altitudinem conii truncati CH; ita semidiameter major AF ad altitudinem conii integri FE, per probl. (§. 215. *Arithm.*) invenientur.

2. Ex hac inventa subducatur altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat soliditatem conorum CED & AEB (§. 386.).
4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas coni truncati ACDB.

E. gr. Sint omnia, ut ante; erit $FE=40'$,
& hinc $EG=30'$.

Periph. major 2512'''

$\frac{1}{4}$ AB 200'''

Basis maj. 502400'''

EF 4000'''

2009600000'''

3

Conus AEB 669866666''' $\frac{1}{2}$

Periph. min. 1884'''

$\frac{1}{4}$ CD 150'''

94200

1884

Basis min. 282600'''

$\frac{1}{4}$ EG 1000'''

Con. CED 282600000

Con. AEB 669866666 $\frac{1}{2}$

Con. trunc. 387266666 $\frac{1}{2}$

THEOREMA VIII.

388. Sphæra æquatur pyramidi, cuius basis æqualis superficiæ, altitudo autem radio sphæra.

De-

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphaeræ in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius dissident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidense est sphæram consistere ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coeuntibus, quorum altitudines a radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumtæ superficiei sphaeræ æquantur. Totâ igitur sphaera recte habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphaeræ. *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

389. *Sphæra est ad cylindrum super Tab. X.
æquali basi & ejusdem altitudinis ut 2 Fig. 132
ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur, ipsum quidem cylindrum (§. 356.) quadrans hemisphaerium (§. 360.), triangulum conum (§. 358.) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit, nempe DC (§. 101.); si ea in discos quantumlibet exiguæ crassitie sciantur, numerus eorum in omnibus ilem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci cylindri; erit EG semidia-

meter disci respondentis in hemisphærio, EF semidiameter disci in cono. Cum vero hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 110.); erunt ipsi inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 313.), hoc est, cum sit ob parallelismum EH & CB *per hypoth.* $EH = CB$ (§. 258.) $= CG$ (§. 32, atque ob $CD : DA = EC : EF$ (§. 207.) & $CD = DA$ (§. 84.), $EC = EF$, ut quadrata rectarum CG, EG & EC. Quare si discum coni a disco cylindri subtrahās, relinquitur discus sphæræ (§. 319.). Idem cum valeat de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus, soliditas sphæræ relinquetur, soliditate coni ex soliditate cylindri subducta. Est vero Conus $\frac{1}{3}$ Cylindri (§. 383.). Ergo sphæra duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA X.

390. *Cubus diametri est ad sphæram propemodum ut 300 ad 157.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter sphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 368.) & cylindrus eandem cum sphæra basin & altitudinem habens 785000 (§. 378.), consequenter sphæra 1570000 : 3 (§. 389.). Est itaque cubus diametri ad sphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc est, ut 300 ad 157 (§. 130. 127. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

391. Dico, cubum diametri esse ad sphaeram
propemodum ut 300 ad 157. In demonstratione enim
assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam
100: 314. (§. 326.)

THEOREMA XI.

392. Superficies sphaerae est quadrupla
circuli radio sphaerae descripti.

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphaera aequalis est pyramidi,
cujus basis est superficies, altitudo ra-
dius sphaerae (§. 388.) superficies ejus
habetur, si soliditas per tertiam semidia-
metri, aut sextam diametri partem di-
viditur (§. 386.). Est vero soliditas
sphaerae factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in
diametrum (§. 389. 378.). Quare si hoc
factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas, seu,
quod perinde est, primum per diame-
trum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi,
hoc est, circuli circa diametrum sphæ-
rae descripti (§. 144. *Arithm.*), & deinde
per $\frac{1}{2}$ (§. 142. 144. *Arithm.*) erit quotus $\frac{4}{3}$
circuli maximi (§. 168. *Arithm.*), hoc
est, quadruplus circuli maximi (§. 153.
Arithm.). Sed idem est superficies sphæ-
rae, per demonstrata. Ergo sphaerae super-
ficies circuli maximi quadrupla Q. e. d.

COROLLARIUM.

393. Area circuli maximi est factum ex periphæria ejus in quartam diametri partem (§. 328.). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex periphæria in diametrum. Superficies ergo sphæræ habetur, periphæria in diametrum ducta, consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis periphæria circuli radio sphæræ descripti, altitudo diameter sphæræ (§. 289.).

PROBLEMA VII.

394. *Data diametro sphæræ, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quærat periphæria circuli radio sphæræ describendi (§. 328.).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphæræ (§. 393.).
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem, prodibit sphæræ soliditas (§. 388. 386.).

E. gr. Sit diameter 5600''; erit

Periph. Circuli 17584'''

Diam. 5600

10550400

87920

Superf. Sphær. 984704'' | 00

56 0''

5908224 0

4923520

55143424 0

$\frac{75}{551434240}$ $\frac{4}{66666666}$ $\left(91^{\circ} 905' 706'' \frac{2}{3} \right)$ Sol. Sphær.

Aliter.

1. Quærat^r cubus diametri 175616000" (§. 368.).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000" numerus quartus proportionalis 91905706 $\frac{2}{3}$ (§. 215. *Arith.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 390.).

PROBLEMA VIII.

395. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi soliditas investigatur per probl. (§. 375.). Tetraëd^rum cum sit pyramis & Octaëd^rum pyramis geminata, Icosaëd^rum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaëd^rum ex duodecim quinquangularibus conflet, quarum bases in superficie icosaëdri & dodecaëdri sunt, vertex in centro coeunt (§. 362. 365.); horum corporum soliditas habetur per probl. (§. 386.). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quærat^r (§. 302. & 312.) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per

4, pro hexaëdro seu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12 pro icosaëdro per 20 (§. 365.).

PROBLEMA IX.

Tab. X. 396. *Corporis irregularis cujuscunque*
Fig. 134. *soliditatem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo eique aqua aut arena superfundatur & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis EBDH, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per probl. (§. 372.).

Sit e. gr. AB 8', AC 5'; erit BC 3'. Sit porro DB 12', BE 4'; erit soliditas corporis 144'.

SCHOLIUM.

397. Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, e. gr. si statuat certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsam construi debet ex asseritis. Reliqua peragenda sunt ut ante.

PROBLEMA X.

398. *Invenire soliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

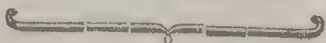
Casus I. Si corpus cavum in numero Geometricorum non contineatur, resolutio eadem, quæ problematis præcedentis (§. 396.).

Casus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, prisma, cylindrus, sphaera, pyramis vel conus; soliditas primum totius corporis cavitate inclusa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas (§. 372. 375. 378. 386. 394.) inveniatur: hac enim ex ista subtracta, relinquitur soliditas corporis cavi.

Sit e. gr. soliditas cylindri cavi AB, CD invenianda, sitque diameter totius corporis AB 56'', longitudo AC 2° 4' 6''; erit soliditas cylindri inclusa cavitate 605' 592'' 960'''. Sit diameter cavitatis 500''; erit soliditas 482' 775'' 000''; quæ ex supra inventa subtracta relinquit soliditatem corporis cavi 122' 817'' 960'''. Tab. X.
Fig. 129.



CAPUT III.
DE
SIMILITUDINE AC RATIONE
SOLIDORUM.



THEOREMA XII.

399. *Corpora similia sunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & similia existunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concursu gigni posse concipiamus; eodem modo determinantur, si plana terminantia & numero æqualia fuerint & similia (§. 105.). Sunt igitur & ipsa similia (§. 106.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. X,
Fig. 128.

400. Quoniam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia (§. 143.). erit $AB:BD = ab:bd$ & $DB:BG = db:bg$. Quamobrem ex æquo $AB:BG = ab:bg$ (§. 138. *Arithm.*). Cum adeo sit $AB:ab = BD:bd$ & $AB:ab = BG:bg$ (§. 122. *Arithm.*); corporum similiarum longitudines AB & ab , latitudines DB & db , itemque altitudines BG & bg in eadem ratione existunt.

Co-

COROLLARIUM II.

401. Cubus sex quadratis æqualibus terminatur (§. 351.). Sunt vero quadrata omnia similia (§. 84. 148.). Ergo cubi omnes sunt similes (§. 399.).

COROLLARIUM. III.

402. Quoniam corpora regularia planis regularibus, adeoque similibus (§. 92. 148.) & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 365.) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 399.).

COROLLARIUM IV.

403. Omnia igitur Tetraëdra omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icosaëdra similia sunt (§. 365.).

THEOREMA XIII.

404. *Cylindrorum & Conorum similium altitudines sunt ut radii basium; axes sunt itidem ut radii basium & iis sub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Si Coni & Cylindri similes sunt, ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 19. *Arithm.*). Patet vero Conos & Cylindros non posse distingui nisi per rationem axis CF vel KL ad diametrum basis DE vel NM atque angulum CFE vel KLM, quem efficiat

Tab. IX.
Fig. 116.
& 118.

ficat axis cum diametro (§. 356. 358.). Axes igitur in Conis & Cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistant. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis perinde ac in planis (§. 101.) altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in Conis & Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 356. 358.), adeoque patet per demonstrata altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in cæteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 206.), consequenter etiam diametris basium (§. 117. *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIV.

Tab. IX.
Fig. 120.

405. *Omnis sphaera est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Omnem semicirculum esse alteri similem patet ex demonstratione theorematis I. part. I. (§. 112.). Sed sphaera describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 360.): omnes igitur sphaerae eodem modo determinantur (§. 105.), adeoque similes sunt (§. 106.). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XV.

406. *Omnia prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides & conī sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 372. 375. 378. 386. *Geom.* & §. 127. *Arithm.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 116. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

407. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum; si altitudines, basium rationem habent (§. 130. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

408. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 356. 358.). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 314.). Ergo cylindri & conī quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 406. & si fuerint æquæ alti, ut quadrata diametrorum (§. 407.).

COROLLARIUM III.

409. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 116. *Arithm.*).

THEOREMA XV.

410. *Corpora similia, prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides atque conī sunt in ratione triplicata homologorum laterum ; itemque altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 406.). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 309. 314.) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 400.). Ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum itemque altitudinum, existunt (§. 116. *Aritlm.*).
Q. e. d.

THEOREMA XVII.

411. *Sphærae sunt ut cubi diametro- rum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VII, Sit circulo DAEB quadratum GFH
Fig. 90, circumscriptum. Quodsi semicirculus
AEB cum quadrato dimidio AGHB cir-
ca axem communem AB in orbem mo-
veatur, ille sphæram, hoc cylindrum
describet, cujus altitudo AB diametro
basis IH æqualis (§. 360. 356.). Quare
si ponamus circulum adhuc alium cum
quadrato similiter circumscripto ; quo-
niam ex theorematibus 1. part. 1. demon-
stra-

stratione constat (§. 112.), omnem semicirculum esse alteri similem & AB ad BH utrobique est ut 2 ad 1, adeoque rectangulum unum alteri simile (§. 144.); inde generabitur sphaera & cylindrus alteri similis (§. 105. 106.). Cum adeo ea utrobique coincident, per quæ a se invicem distingui debebat, quod in utroque casu gignitur (§. 19. *Arithm.*); erit cylindrus unus ad suam sphaeram ut alter ad suam; consequenter sphaeræ sunt inter se ut isti cylindri (§. 122. *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 409.), hoc est ut cubi earundem existunt (§. 173. *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA XVIII.

412. *Æqualia parallelepipeda, prismata, cylindri, coni & pyramides reciprocant bases & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex basibus in altitudinem æqualia sunt (§. 372. &c.). Quamobrem altitudo corporis A est ad altitudinem alterius B, uti reciproce basis ipsius B ad basin ipsius A (§. 212. *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA XIX.

413. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis est diametro baseos, est ad cubum diametri ut 785 ad 1000.*

Wolf. Mathes.

Cc

De.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100; erit basis 7850 (§. 328.). Et quoniam altitudo DC = AB, per *hypoth.* soliditas cylindri 785000 (§. 378.). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 368.). Ergo cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 130. *Arithm. Q. e. d.*





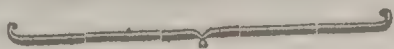
ELEMENTA ANALYSEOS MATHEMATICÆ.



CAPUT I.

DE

ALGEBRA AD GEOMETRIAM
 ELEMENTAREM APPLICATA.



PROBLEMA I.

414. *Problema Geometricum algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Observentur ea omnia, quæ in probl. (§. 357. *Arithm.*) fieri præcepimus
2. Cum vero rarissime ad æquationem eodem modo in problematis geometricis

Cc 2

cis

cis perveniatur, quo in numericis
 usi sumus; hic ulterius quædam pecu-
 liaria notanda sunt. Nempe.

- a) Concipiatur jam factum, quod ad fa-
 ciendum proponitur.
- 6) Omnium linearum in schemate de-
 pictarum relationes, nullo habito di-
 scrimine inter cognititas & incognitas,
 excutiantur, ut appareat, quomodo
 aliæ ab aliis dependeant, seu quibus
 datis, aliæ una dentur, sive per trian-
 gula similia (§. 148.), sive per rectan-
 gula (§. 327.), sive per alia (quod
 tamen raro fieri solet) theorematata.
- 7) Ut igitur triangula similia & rectan-
 gula obtineas, sæpius producendæ sunt
 lineæ, donec vel directæ, vel indi-
 recte datis fiant æquales, vel alias se-
 cent, sæpius lineæ parallelæ atque per-
 pendiculares ducendæ, sæpius puncta
 quædam connectenda, sæpius anguli
 datis æquales construendi: quæ fieri
 posse, ex Geometria elementari ma-
 nifestum est. Eum in finem probe
 tenenda sunt theorematata de aqualita-
 te angulorum & similitudine triangu-
 lorum (§. 132. 154. 166. 170. 182. 206.
 207. 208. 251.
- 8) Quodsi in æquationem non satis con-
 cinnam incideris; alio adhuc modo
 excutiendæ sunt linearum relationes,
 ac interdum sufficit, non directæ quæ-
 rere

rere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

- 5) Reductione æquationis facta ex ultima, quæ prodit, elicienda est constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

PROBLEMA II.

415. *Æquationem simplicem construere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b :$

x (§. 215. *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 209.)

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$.

Hæc quarta proportionalis inventa (§. 209.) dicatur g ; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in casu

primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa - bb}{c}$. Quoniam $aa - bb =$

$(a+b)(a-b)$ erit $c : a+b = a-b : x$ (§. 215. *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2 b - pec}{ad}$. Invenitur per casum I

Cc 3 . $g =$

$$g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2 b}{ad} \text{ \& } h = \frac{bc}{d}, \text{ ut fit } \frac{bce}{ad} = \frac{bc}{a};$$

denique per casum I. $i = \frac{bc}{d}$: erit $x = g - i$,

differentia nempe linearum g & i . Brevius:
Fiat $a: a + c = a - c: g$ per cas. 3. & $d: g$
 $= b: \frac{bg}{d}$, per cas. I. quæ erit x .

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur ut in casu

præcedente $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$; erit $x = g$

+ f , summa linearum g & f .

6. Sit $x = \frac{a}{b} + \frac{bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{af + cg} = \frac{(a + d)b}{af + cg}$.

Quærat $\frac{cg}{a}$ & fiat $\frac{f + cg}{a} = h$; erit $f + h$:

$a + d = b: x$, consequenter $x = \frac{(a + d)b}{f + h}$.

Reductus adeo est casus præsens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2 b - bad}{af + bc} = \frac{a^2 b - bad}{af + bc}$. Quærat $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b}$

$= h$, erit $x = \frac{a(a - d)}{h + c}$, consequenter $h + c$:

$a - d = a: x$

Tab. XL Fig. 135. 8. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Construat \triangle ABC cuius crus $AB = a$, $BC = b$,
(§. 151.); erit $AC = \sqrt{a^2 - b^2}$, (§. 319.). Dicatur $AC = m$, erit $a^2 - b^2 = m^2$,
adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c: m = m: x$.

9. Sit

9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super $AB = a$ describatur Tab. XI.
Fig. 136.

semicirculus & in eo applicetur $AC = b$. Cum
triangulum ACB sit rectangulum (§. 241.); erit
 $CB = \sqrt{a^2 - b^2}$, (§. 319.). Dicatur CB
 $= m$: erit $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$.

10. Sit $x = \frac{a^2 b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur

$b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = h$: erit $x =$

$\frac{a^2 + cd}{h + c}$. Quaratur inter $AC = c$ & $CB = d$ Tab. XI.
Fig. 137

media proportionalis $CD = \sqrt{cd}$. (§. 249.)

Fiat $CE = a$; erit $DE = \sqrt{a^2 + cd}$.

Dicatur hæc m : erit $x = \frac{m^2}{h + c}$, consequenter

$h + c : m = m : x$.

PROBLEMA III.

416. *Æquationem quadraticam geometrice construere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (§. 358. *Arithm.*) ipsas quoque per probl. præced. (§. 415.) construere licet.

Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (§. 211. *Arithm.*). Invenitur adeo $x = \sqrt{ab}$, si inter $AC = a$ & $BC = b$ quaratur media proportionalis DC (§. 249.). Si

C c 4

æqua-

Tab. XI.
Fig. 137.

æquatio affecta x^2 . $ax = b^2$; erit $x = \frac{1}{2}a$. $V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, hoc est, vel $x = \frac{1}{2}a + V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, vel $x = V(\frac{1}{4}a^2 - b^2) - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + (V(\frac{1}{4}a^2 - b^2) - \frac{1}{2}a)$ vel $x = \frac{1}{2}a - V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Omne igitur artificium construendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipsius $V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$,

Tab. XI. itemque ipsius $V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Utrumque vero
Fig. 135. jam docuimus in problemate præcedente.

Nimirum si in triangulo rectangulo fiat $AB = \frac{1}{2}a$ & $BC = b$; erit $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ (§. 319.). Sed si super $AB = \frac{1}{2}a$ describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = b$; erit $CB = V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, ut in problemate præcedente demonstratum.

PROBLEMA IV.

Tab. XI. 417. *Data perimetro $AB + BC + CA$
Fig. 135 & area trianguli rectanguli, invenire hypotenusam.*

Sit $AB + BC + CA = a$, $AC = x$, $\text{area} = b^2$,
erit $BC + BA = a - x$

Jam cum sit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 319.) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$ (§. 183. *Arithm.*): erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$ (§. 65. *Arithm.*). Est vero $AC^2 = x^2$ & $(AB + BC)^2 = a^2 - 2ax + x^2$, $2AB \cdot BC = 4b^2$ (§. 302.). Quare

$$\begin{array}{r} x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2 \\ 2ax = a^2 - 4b^2 \\ x = \frac{1}{2}a - 2b : a \end{array}$$

Æqua-

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

feu $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : x$ (§. 134. *Arithm.*).
Habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo est ut dimidia perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypotenusam.

PROBLEMA V.

418. *Datam rectam AB media & ex- Tab. XI.
trema ratione secare in C, hoc est, ut Fig. 138.
sit AB:AC=AC:CB.*

Sit $AB=a$, $AC=x$; erit $CB=a-x$,
consequenter per conditionem problematis

$$a : x = x : a - x$$

$$x^2 = a^2 - ax \quad (\S. 210. \text{Arith.})$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Constructio. I. Jungantur $AB=a$ & $BD=\frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $AD=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.
2. Fiat $DF=\frac{1}{2}a$ & $AF=AC$; erit $AC=x$.

Tab. XI. Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Nimirum radio $AC = \frac{1}{2}a$ describitur circulus & in A erigatur perpendicularis $AB = a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit $ED = a$ & $BE = x$. Quare si fiat $BF = BE$: recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim $BD = a + x$, adeoque BE. $BD = ax + x^2$, consequenter $ax + x^2 = a^2$.

PROBLEMA VI.

Tab. XI. 419. Rectam datam AC utcumque divisam in B iterum secare in D, ita ut fit $AD:DC = DC:BD$.

$$\begin{aligned} \text{Sit } AB &= a & BD &= x \\ BC &= b & \text{erit } DC &= b - x \\ AD &= a + x \end{aligned}$$

Quare per conditionem problematis

$$\begin{aligned} a+x:b-x &= b-x:x \\ \frac{ax+x^2}{ax+2bx} &= \frac{b^2-x^2}{b^2} \\ x &= b^2:(a+2b) \end{aligned}$$

Invenitur adeo x ob analogiam
 $a+2b:b = b:x$. (§. 210.)

PROBLEMA VII.

420. *Datam rectam AC divisam in Tab. XI.
B denuo secare in D, ita ut sit CB:DB Fig. 140.
=DA:AB.*

$$\begin{array}{lcl} \text{Sit } CB=a & DB=x & \\ BA=b & \text{erit } DA=b+x & \end{array}$$

Quare per conditionem problematis

$$\begin{array}{l} a:x=b+x:b \\ \hline ab=bx+x^2 \\ \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{4}b^2} \quad (\S. 358. \text{ Arithm.}) \\ \hline \frac{\frac{1}{4}b^2+ab}{V(\frac{1}{4}b^2+ab)} = \frac{\frac{1}{4}b^2+bx+x^2}{\frac{1}{4}b^2+bx+x^2} \\ \hline V(\frac{1}{4}b^2+ab) = \frac{1}{2}b+x \\ \hline V(\frac{1}{4}b^2+ab) - \frac{1}{2}b = x \end{array}$$

Constructio. Inter $EG=b$ & $GF=a$ qua- Tab. XI.
ratur media proportionalis HG, quæ erit Fig. 142.
 $=Vab$. Fiat $GI=\frac{1}{2}b$ & ducatur HI: erit
 $PI=V(\frac{1}{4}b^2+ab)$. Fiat denique $KI=GI$: erit
 $KH=V(\frac{1}{4}b^2+ab) - \frac{1}{2}b$. (§. 249. 252.)

DEFINITIO I.

421. Si quatuor fuerint lineæ propor-
tionales, extremæ mediis, mediæ ex-
tremis reciprocæ dicuntur.

PROBLEMA VIII.

422. *Datam rectam AB ita secare in Tab. XI.
C, ut partes AC & CB sint duabus da- Fig. 141.
tis DE & FG reciprocæ.*

Sit

$$\begin{array}{ll} \text{Sit } AB=a & AC=x \\ DE=b & CB=a-x \\ FG=c & \end{array}$$

Ergo (§. 421.).

$$x:b=c:a-x$$

$$ax-x^2=cb$$

$$-cb=x^2-ax$$

$$\frac{1}{4}aa \quad \frac{1}{4}aa \quad (\S. 358. \text{Arithm.})$$

$$\frac{1}{4}aa-cb=\frac{1}{4}a^2-ax+x^2$$

$$V(\frac{1}{4}a^2-cb)=\frac{1}{2}a-x$$

$$=x-\frac{1}{2}a$$

$$x=\frac{1}{2}a+V(\frac{1}{4}aa-cb)$$

Tab. XI.
Fig. 144. *Constructio.* Quærat inter $HI=b$ & $IK=c$ media proportionalis $MI=Vcb$ (§. 249.). Radio $IL=\frac{1}{2}a$ describatur arcus & ducatur PM ipsi IK parallela (§. 202.): erit $NM=x$ & $MP=a-x$. Nam demisso ex centro L perpendiculo LO , erit $NO=OP$ (§. 225.) & $OL=MI=Vcb$. Sed $NL=LI$ (§. 32.) $=\frac{1}{2}a$. Ergo $NO=V(\frac{1}{4}aa-cb)$ (§. 319.). consequenter ob $MO=IL=\frac{1}{2}a$, $MN=\frac{1}{2}a-l'$ ($\frac{1}{4}aa-cb$) $=x$ & $PM.=\frac{1}{2}a+V(\frac{1}{4}aa-cb)=a-x$.

COROLLARIUM.

423. Construere ergo æquationem quadraticam affectum $ax-x^2=cb$ idem est ac datis duabus rectis c & b , vel si $c=b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a-x$ invenire.

PRO-

PROBLEMA IX.

424. Datis duabus rectis DE & FG Tab. XI.
reciprocas invenire, quarum differentia Fig. 141.
sit, datæ rectæ AC æqualis.

Sit DE = a Reciproca minor = x

FG = b erit major = $c + x$

AC = c

Ergo (§. 421.)

$$x : a = b : c + x$$

$$ab = cx + x^2$$

$$\frac{1}{4}cc \quad \frac{1}{4}cc$$

$$\frac{1}{4}cc + ab = \frac{1}{4}cc + cx + x^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + ab\right)} = \frac{1}{2}c + x$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + ab\right)} - \frac{1}{2}c = x$$

Constructio. Quærat inter AC = b & Tab. XI.
CB = a media proportionalis DC. Fiat CE Fig. 137.
= $\frac{1}{2}c$: erit DE = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + ab\right)}$. Unde si sub-
trahitur $\frac{1}{2}c$ = EF, relinquitur DF = x .

COROLLARIUM.

425. Construere ergo æquationes quadrati-
cas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$ idem est ac
datis duabus rectis a & b , vel, si $a = b$, ei-
dem rectæ b reciprocas, ibi x & $x + c$,
hic x & $x - c$ reperire.

PRO.

PROBLEMA X.

Tab. XI. 426. *Datam rectam AB ita secare in*
 Fig. 141 *C ut rectangulum sub tota AB & seg-*
mento minore AC æquale sit rectangulo
sub majore CB & differentia utriusque
CB—AC.

$$\begin{aligned}\text{Sit } AB &= a \quad \dots AC = x \\ \text{erit } CB &= a - x \\ CB - AC &= a - 2x\end{aligned}$$

Quare per conditionem problema-
 ti

$$\begin{array}{r} ax = a^2 - 3ax + 2x^2 \\ -a^2 = -4ax + 2x^2 \\ \hline -\frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax \\ \quad a^2 \qquad \qquad a^2 \\ \hline \frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2 \\ \quad V\frac{1}{2}a^2 = a - x \\ \quad x + V\frac{1}{2}a^2 = a \\ \hline x = a - V\frac{1}{2}a^2\end{array}$$

Constructio. Quærat^r inter $\frac{1}{2}a$ & a media
 proportionalis, quæ erit pars major $a - x$,
 adeoque subducta ex a relinquit minorem x .

PROBLEMA XI.

Tab. XI. 427. *Dato radio circuli ED invenire*
 Fig. 143. *latus trigoni regularis ipsi inscribendi*
AB.

Du-

care in
& seg-
angulo
riusque

Ducatur latus hexagoni EB, & fit $BD=EB$ (§. 274.) $=a$, $AB=x$; erit $BF=\frac{1}{2}x$ (§. 225.). Et quoniam anguli ad F recti (per §. cit.) $BE=BD$ per demonst. $BF=BF$: erit $EF=FD$ (§. 184.) $=\frac{1}{2}a$. Quare (§. 319.) $BD^2-DF^2=FB^2$, hoc est

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}aa=\frac{1}{4}x^2 \\ 3aa=x^2 \\ \hline \sqrt{3}aa=x \end{array}$$

blema-

Est ergo x media proportionalis inter $3a$ & a . Et si fiat $a=1$, erit $x=\sqrt{3}$.

COROLLARIUM I.

428. Si dato latere trigoni regularis b inveniri debet radius circuli circumscripti y ; erit $3y^2=b^2$, consequenter $y=\sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, quæ est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b .

PROBLEMA XII.

429. Dato ratio circuli AE invenire Tab. XI. latus octogoni regularis circulo inscribendi. Fig. 145.

media
 $a=x$,
rem x .

invenire
ribendi

Sit $AE=r$, $AF=y$; erit latus quadrati $AB=\sqrt{2}r^2$ (§. 319.) & $AG=\sqrt{\frac{1}{2}}r^2$ (§. 225.). Porro cum $AEF=45^\circ$ (§. 264.), & angulus ad G rectus (§. 225.) erit quoque $EAG=45^\circ$ (§. 188.), consequenter $EG=AG$ (§. 198.) $=\sqrt{\frac{1}{2}}r^2$. Hinc $FG=r-\sqrt{\frac{1}{2}}r^2$. Quare (§. 319.)

yy

Du-

$$\begin{array}{r}
 yy = \frac{1}{2}r^2 + 1\frac{1}{2}r^2 - rV2r^2 \\
 \text{hoc est } yy = 2r^2 - rV2r^2 \\
 \hline
 y = V(2r^2 - rV2r^2)
 \end{array}$$

Quod si fiat $r=1$; erit $y=V(2-V2)$.

PROBLEMA XIII.

Tab. XI. 430. Dato latere Octogoni AF in
Fig. 145. venire radium circuli circumscribendi
 AE .

Sit $AF=b$, $AE=y$, erit (§. 429.)

$$\begin{array}{r}
 b^2 = 2y^2 - V2y^4 \\
 \hline
 V2y^4 = 2y^2 - b^2 \\
 \hline
 2y^4 = 4y^2 - 4b^2y^2 + b^4 \\
 \hline
 0 = 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4 \\
 \hline
 0 = y^4 - 2b^2y^2 + \frac{1}{2}b^4 \\
 \frac{1}{2}b^4 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2}b^4 \quad (\S. 183. \\
 \text{Arithm.)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4 \\
 \hline
 bV\frac{1}{2}b^2 = y^2 - b^2 \\
 \hline
 b^2 + bV\frac{1}{2}b^2 = y^2 \\
 \hline
 V(b^2 + bV\frac{1}{2}b^2) = y
 \end{array}$$

Est igitur $b:y = y:b + V\frac{1}{2}b^2$ (§. 134. 135.
conseq. $\frac{1}{2}b:y = y:2b + 2V\frac{1}{2}b^2$ Arithm.)

Hinc elicitur sequens geometrica.

Tab. XI. Construtio. Super latere octogoni $A'B=$
Fig. 146. describatur semicirculus & ex centro C eri-
gatur.

gatur perpendicularis indefinita CF, erit recta
 $DB = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ (§. 319.). Fiat $AE = 2b + 2b$
 $\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, descriptoque semicirculo AFE; erit
 $AF = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})}$, (§. 252.), conse-
 quenter radius circuli octogono circumscri-
 bendi: quod adeo super recta AB construe-
 tur, si radio AF describatur circulus transiens
 per A & B.

PROBLEMA XIV.

431. Dato radio circuli AC invenire Tab. XI.
Fig. 149.
 latus decagoni regularis inscribendi AB.

Quoniam AB est $\frac{1}{10}$ totius periphe-
 riæ, angulus ACB = 36° (§. 45. 47.), con-
 sequenter ob AC = BC (§. 32.), ABC
 = CAB = 72° (§. 194.), adeoque DAC
 = 108° (§. 126.). Fiat AD = AC, erit
 ADC = ACD = 36° (§. 194.), consequen-
 ter DCB = 72° . Sunt ergo triangu-
 la ABC & BDC æquiangula & hinc BD:
 BC = BC: AB (§. 206.).

Sit jam AC = BC = a , AB = x ; erit
 $BD = a + x$, consequenter per demon-
 strata:

$$\frac{a+x : a = a : x}{ax + x^2 = a^2}$$

Est ergo a media & extrema ratione secan-
 da, cujus pars major x (§. 418.). Vel ra-
 dio a quærendæ sunt reciproca $a + x$ & x (§.
 425.).

Wolf. Mathf. D d Theo.

Theorema. Latus decagoni regularis circulo inscripti est pars major radii media & extrema ratione secti.

Tab. XI. *Constructio.* Quoniam $x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§.418.)
Fig. 148. radio a describatur circulus & in centro E
erigatur perpendicularis $IE = a$. Fiat EF
 $= \frac{1}{2}a$; erit $FI = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Quare si ex F radio
IF describatur arcus KI; erit $KE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$
 $-\frac{1}{2}a$.

S H O L I O N.

432. Hanc ipsam constructionem tradit Ptole-
mæus in suo *Almagesto*.

P R O B L E M A X V.

Tab. XI. 433. Dato latere decagoni regularis
Fig. 149. circulo describendi AB, invenire radium
AC.

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $BD = a + x$
& per demonstrata in probl. præc.

$$\frac{a+x}{ax+a^2} = \frac{x}{x^2}$$

$$\frac{ax+a^2}{a^2} = \frac{x^2}{x^2-ax}$$

$$\frac{\frac{5}{4}a^2}{\frac{5}{4}a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2}$$

$$\frac{\frac{5}{4}a^2}{V\frac{5}{4}a^2 = x - \frac{1}{2}a, \text{ ob } x > \frac{1}{2}a \text{ (§. 431.)}}$$

$$\frac{\frac{5}{4}a^2}{\frac{5}{4}a^2 + V\frac{5}{4}a^2 = x}$$

s circulo
extrema

(§.418.)

centro E

Fiat EF

F radio

$E = \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$

it Ptole.

regularis
radius

$O = a + x$

$\frac{1}{2}a$ (§.
431.)

Con.

Constructio. Construat^r triangulum rectan-
gulum MLN, in quo $ML = a$ & $MN = \frac{1}{2}a$:
erit $LN = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 319.). Producatur MN in
O, donec $NO = LN$: erit $MO = x$. Ex centro
itaque O per M circulus describi potest.

Tab. XI.

Fig. 147.

PROBLEMA XVI.

434. Dato radio circuli AE & latere
decagoni AF invenire latus pentagoni
AB.

Tab. XI.

Fig. 145.

$$\begin{aligned}\text{Sit } AE &= a & AB &= x \\ AF &= b & AG &= \frac{1}{2}x \quad (\S. 225.). \\ GE &= \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} \\ FG &= a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}\end{aligned}$$

Quare (§. 319.)

$$b^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + a^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$

$$2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 2a^2 - b^2$$

$$4a^2 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$-a^2x^2 = -4a^2b^2 + b^4$$

$$4a^2b^2 - b^4 = a^2x^2$$

$$4b^2 - (b^4 : a^2) = x^2$$

$$\text{Est vero } b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} \quad (\S. 431.)$$

$$b^2 = \frac{5}{4}a^2 - a^2 \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$b^4 = \frac{25}{16}a^4 - 3a^4 \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$\text{Ergo } x^2 = \frac{25}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - (\frac{25}{4}a^4 -$$

$$3a^4 \sqrt{\frac{5}{4}a^2}) : a^2 = \frac{25}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} -$$

$$\frac{25}{4}a^2 + 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{25}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} =$$

$$a^2 + \frac{5}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + b^2.$$

Tab. XI. *Constructio.* Quærat^r latus Decagoni EK (§. Fig. 148. 431.) erit KI latus pentagoni

Theorema : Latus pentagoni regularis potest latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum simul.

S C H O L I O N.

435. Eandem prorsus constructionem dedit Ptolemaeus.

P R O B L E M A XVII.

Tab. XII. 436. *Datis pro triangulo rectangulo*
Fig. 150. BAC hypotenusa BC & differentia crurum DC invenire crura.

Sit $BC=c$, $DC=f$, $\frac{1}{2}(AB+AC)=x$; erit $AC=x+\frac{1}{2}f$, $AB=x-\frac{1}{2}f$ (§. 360. *Arithm.*), consequenter (§. 319.)

$$\begin{aligned} 2x^2 + \frac{1}{2}f^2 &= c^2 \\ 2x^2 &= c^2 - \frac{1}{2}f^2 \\ x^2 &= \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}f^2 \\ x &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}f^2\right)} \end{aligned}$$

Constructio. Construat^r rectangulum triangulum AFE, in quo $AF=FE=\frac{1}{2}c$, erit $AE=\sqrt{\frac{1}{2}cc}$. Super AE describatur semicirculus ob $AF=FE$ transiturus per F & in eo applicetur $EG=\frac{1}{2}f$; erit $AG=x$, consequenter si fiat $DG=GC=GE$, crus majus AC, minus $AD=AB$.

Tab. XII.
Fig. 151.

P R O B L E M A XVIII.

437. *Triangulo dato HLI æquale & alteri dato NOP simile construere.*

Sit

Sit $HI=f$, $LM=e$, $NP=m$, $QO=n$, basis trianguli quæfiti= y , altitudo= z : erit

(§. 306.) (§. 302.)

$$m:n=y:z \quad fe=zy$$

$$\frac{mz=ny}{fe:y=z} \quad y$$

$$\frac{mfe:y=mx}{ny=mfe:y} \quad m$$

$$ny=mfe:y$$

$$\frac{ny'=mfe}{y^2=mfe:n} \quad y$$

$$\frac{y^2=mfe:n}{y=\sqrt{mfe:n}} \quad n$$

$$y=\sqrt{mfe:n}$$

Constructio. Producat altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela: erit $RS=me:n$. Quærat inter RS & SI= f media proportionalis TS, $=\sqrt{mfe:n}$, super qua ob angulos N & P datos triangulum TSV construi potest. (§. 203.).

PROBLEMA XIX.

438. A dato puncto E ducere rectam, quæ circumulum datum tangat.

Tab. XII.
Fig. 152.

Quia punctum E positione, circulus GDFG & positione, & magnitudine

Dd 3

da-

datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque $EG=a$, $GC=b$, $ED=x$; erit $EF=a+2b$ &.

$$\begin{array}{r} a+2b : x :: x : a \quad (\S. 256.) \\ \hline aa + 2ab = x^2 \\ \hline \sqrt{aa+2ab} = x \end{array}$$

Constructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta ED. Super ea describatur semicirculus CDE ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 241.). Est vero $CE^2 = aa + 2ab + bb$, $CD^2 = bb$; ergo $MN = \sqrt{(2ab + aa)} = x$ (§. 319.).

PROBLEMA XX.

Tab. XII. 439. *Data diagonali pentagoni regularis AD, invenire latus pentagoni AE.*
Fig. 153:

Sit $AE=x$, $AD=a$. Quoniam mensura anguli AEF est arcus AB (§. 238.) & anguli EFA mensura dimidius arcus AE cum arcu dimidio CD (§. 240.) hoc est, itidem arcus AB (§. 264. erit angulus $AEF = AFE$ (§. 119.) adeoque $AF = AE$ (§. 198.) $= x$ & hinc $FD = a - x$. Porro anguli AED mensura est arcus $AB + \frac{1}{2} BC$ (§. 238.) & ipsius F mensura $AB + \frac{1}{2} BC$ (§. 240.) & angulus ADE utriusque triangulo ADE & EFD communis. Quare (§. 206.).

$$AD:ED=ED:FD$$

$$a:x=x:a-x$$

$$\frac{a^2-ax=x^2}{a^2=x^2+ax}$$

Est adeo x pars major ipsius a media & ex-
trema ratione sectæ (§. 418.).

COROLLARIUM.

440. Quodsi $AD=x$, $ED=a$, reperietur x
 $=\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$. Unde patet, quomodo ex
dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA XXI.

441. *Invenire circulum superficiæ cy-
lindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r:p$;
peripheria cylindri $=p$, altitudo a ;
erit superficies $=ap$ (§. 377.). Sit ra-
dius circuli $=x$; erit $r:p=x:\frac{px}{r}$,

quæ est ejusdem peripheria (§. 326.).
Unde habemus (§. 328.).

$$\frac{px^2:2r-ap}{2r}$$

$$\frac{px^2=2rap}{p}$$

$$x^2=2ar$$

$$x=\sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies cylindri æquatur circulo, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum & altitudinem cylindri.

PROBLEMA XXII.

442. *Invenire cylindrum, cujus superficies sit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo cylindri $= x$, radius basis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§. 326.), consequenter (§. 377.).

$$\begin{array}{r} pyx : r = \frac{1}{2} pr \\ \hline pyx = \frac{1}{2} pr^2 \\ \hline yx = \frac{1}{2} r^2 \\ \hline x = r^2 : 2y \end{array}$$

Est adeo problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio assumi possit, vel, quod perinde est altitudo.

PROBLEMA XXIII.

443. *Data diametro sphaerae & altitudine cylindri ipsi æqualis, invenire diametrum cylindri.*

Sit diameter sphaerae $= d$, altitudo cylindri $= a$, diameter ejus $= x$, ratio diametri ad peripheriam $= b : c$; erit soliditas sphaerae $= cd^3 : 6b$ (§. 394.). et soliditas

tas cylindri $= ac x^2 : 4b$ (§. 378.). Quare per conditionem problematis:

$$cd^3 : 6b = acx^2 : 4b$$

$$4d^3 = 6ax^2$$

$$2d^3 : 3a = x^2$$

$$\sqrt[3]{(2d^3 : 3a)} = x$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a : 2d = d^3 : x^2$$

resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri sphaeræ est ad quadratum diametri cylindri ipsi æqualis ut tripla cylindri altitudo ad diametrum sphaeræ duplam.

CAPUT II.

DE

ALGEBRA AD SECTIONES CONICAS APPLICATA.

DEFINITIO II.

444. *Sectiones conicæ sunt lineæ curvæ, quæ ex coni sectione oriuntur.*

S C H O L I O N

445. *Sectiones conicæ præter circulum sunt tres*
Parabola, Hyperbola & Ellipsis.

DEFINITIO III.

T. b. XII.
Fig. 154.

446. *Diameter curvæ est recta AD*
rectas MM inter se parallelas bifariam
secans in P. In specie *Axis* vocatur, si
rectas æquidistantes ad angulos rectos
fecerit.

DEFINITIO IV.

447. *Vertex Curvæ est punctum A, ex*
quo ducitur diameter.

DEFINITIO V.

448. *Ordinatim applicatæ sunt lineæ*
æquidistantes MM, quæ a diametro bi-
fariam secantur. Earum dimidiæ PM
vocantur *semiordinatæ*.

DEFINITIO VI.

449. *Abscissa AP est pars diametri vel*
alterius lineæ, ad quam curva refertur,
inter verticem aut aliud punctum fixum
& semiordinatam PM intercepta. Qui-
dam *sagittam* vocant.

DEFINITIO VII.

T. b. XII.
Fig. 155.

450. *Diameter transversa AB est re-*
cta, quæ utrinque intra curvas conti-
nua

nuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat.

DEFINITIO VIII.

451. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

DEFINITIO IX.

452. *Quantitates variabiles* sunt, quæ Tab. XII. crescentibus aliis vel decrecentibus aut Fig. 155. crescunt, aut decrescunt. E. gr. semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles: hac enim crescente crescit etiam vel decrescit altera. *Quantitates constantes* sunt, quæ crescentibus aliis vel decrecentibus eadem manent. Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans: crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet.

HYPOTHESIS I.

453. *Quantitates constantes* primis alphabeti litteris indigentur a, b, c, &c. *variabiles vero* ultimis z, y, x, &c. Speciatim x abscissam, y semiordinatam denotet, nisi aliud expresse moneatur.

DEFINITIO X.

454. *Curva algebraica* est, in qua re- Tab. XII. latio abscissarum AP ad semiordinatas Fig. 155. per æquationem algebraicam explicari potest Sit e. gr. in circulo $AB=a$, $AP=x$,
PM

$PM=y$, erit $PB=a-x$, consequenter ob
 $PM^2=AP \cdot BP$ (§. 249. 291.), $y^2=ax-x^2$.
 Vel fit $PC=x$, $AC=a$, $PM=y$: erit (§. 319.) $MC^2-PC^2=PM^2$, hoc est, $a^2-x^2=y^2$.

DEFINITIO XI.

455. *Parabola* est curva, in qua $ax=y^2$, hoc est quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

COROLLARIUM I.

456. Est ergo in ea $x=y^2:a$ atque $a=y^2:x$, hoc est, abscissa est tertia proportionalis ad parametrum & semiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abscissam & semiordinatam.

COROLLARIUM II.

457. Porro $\sqrt{ax}=y$, hoc est semiordinata est media proportionalis inter parametrum & abscissam.

COROLLARIUM III.

Tab. XIII.
Fig. 162.

458. Data itaque parametro AB describi potest parabola. Continuetur enim parameter AB in C & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum assumtis circino usque ad A aperto ducantur arcus, rectam BV in I, II, III, IV; V &c. rectam vero BC in 1, 2, 3,

3, 4, 5 &c. interfecantes: erunt BI , B
 2 , $B3$, $B4$, $B5$ &c. abscissæ, BI , BH ,
 BHI , BIV : BV ; &c. semiordinatæ (§. 249.
 Quare si lineæ BI , $B2$, $B3$ &c. ex
 recta BC in BN transferantur & in punctis I ,
 2 , 3 &c. normales applicentur $H=BI$, 2
 $H=BH$, 3 $III=BII$ &c. curva per pun-
 ctâ I . II . III &c. transiens parabola est: BN
 vero ejus axis (§. 457.).

COROLLARIUM IV.

459. Quodlibet etiam punctum parabolæ
 geometricè determinari potest. E. gr. quæ-
 ritur, utrum punctum M sit in parabola,
 nec ne. Demittatur ex M ad BN perpen-
 dicularis PM & fiat PN parametro AB æqualis.
 Super BN describatur semicirculus. Quodsi
 enim is transeat per M ; erit punctum M in
 parabola (249. 457.).

Tab. XII.
 Fig. 162.

DEFINITIO XII.

460. Focus est punctum axis F , in quo semiordinata FN æquatur semipa-
 rametro. Tab. XII.
Fig. 157.

PROBLEMA XXIV.

461. Invenire distantiam Foci a ver-
 tice AF .

Sic $AF=x$, parameter= a , erit FN
 $=\frac{1}{2}a$ (§. 460.), consequenter.

$$\frac{1}{4} a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\S. 455.)$$

$$\frac{1}{4}a = x$$

Theorema. In parabola distantia foci a vertice AF est ad parametrum in ratione subquadrupla, seu quarta pars parametri.

COROLLARIUM I.

462. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 455.): quadratum semiordinatæ PM est quadruplum rectanguli ex distantia foci a vertice in abscissam $= ax$ five AF. AP.

COROLLARIUM II.

463. Invenitur adeo distantia foci a vertice AF, si ad abscissam quamcunque AP & dimidiam semiordinatam $\frac{1}{2}$ PM quaeratur tertia proportionalis (§. 210.). Est enim $\frac{1}{4} PM^2 = AP$. AF (§. 291.), consequenter $PM^2 = 4 AF$. AP.

PROBLEMA XXV.

Tab. XII. 464. *Determinare quantitatem rectæ*
Fig. 157. FM ex foco F ad extremitatem semiordinatæ M ductæ.

Sit $AP = x$. Quoniam $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 461.), erit $PF = x - \frac{1}{4}a$ vel $\frac{1}{4}a - x$, si $AF > PA$ consequenter

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

$$PM^2 = ax \quad (\S. 455.)$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 319.)$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a$$

Theo.

Theorema. Recta MF ex foco F ad extremitatem semiordinatæ parabolæ ducta æquatur aggregato ex abscissa AP & distantia foci a vertice AF .

COROLLARIUM. I.

465. Si quarta pars parametri ex A in f Tab. XIII. & F transfertur & per AD parallelæ quot- Fig. 1. cunque ipsi in punctis P normales MM aguntur, tandemque ex F intervallo Pf puncta M determinantur; curva per hæc puncta transiens est parabola.

COROLLARIUM. II.

466. Potest ergo parabola etiam continuo motu describi. Nimirum assumpta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB secans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum altero sui extremo in foco F fixum, quod sit $= AD + AF$. Quodsi stylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorsum & dein sinistrorsum promoveatur; stylus parabolam designabit. Est enim constanter $FM = EM = Pf = x + \frac{1}{4}a$, consequenter punctum M in parabola (§. 464.).

PROBLEMA XXVI.

467. *Invenire rationem semiordinatarum in Parabola*

Sint abscissæ x & v , semiordinatæ y & z ; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 455.), consequenter

$$y^2$$

$$y^2 : z^2 = ax : av$$

$$y^2 : z^2 = x : v \text{ (§. 348. Arithm.)}$$

$$y : z = Vx : Vv$$

Theorema: Quadrata semiordinatarum sunt inter se ut abscissæ: ipsæ autem semiordinate in ratione subduplicata abscissarum.

PROBLEMA XXVII.

468. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum semiordinatarum*
 Tab. XII. *PM + pm in differentiam earundem Rm.*
 Fig. 175.

$$PM + pm = Vax + Vav \text{ (§. 457.)}$$

$$mR = Vav - Vax$$

$$(PM + pm)mR = av - ax = a(v - x) = a. Pp.$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum semiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abscissarum.

COROLLARIUM.

469. Est ergo parameter ad summam duarum semiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abscissarum (§. 212. Arithm.).

PROBLEMA XXVIII.

470. *Determinare quantitatem chor-*
 Tab. XIII. *dæ AM.*
 Fig. 158.

Si Parameter = a , $AP = x$ erit $PM^2 = ax$ (§. 455.). Quare cum $AP^2 = x^2$; erit

erit $AM^2 = ax + x^2$ (§. 319.), $= (a+x)x = (a+AP)AP$.

Theorema. In parabola chorda est media proportionalis inter abscissam & compositam ex parametro & abscissa.

DEFINITIO XIII.

471. SI TM curvam tangit in M, Tab. XIII.
ducatur MR ad tangentem normalis; Fig. 159.
recta PT inter tangentem TM & semiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter semiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit.

COROLLARIUM.

472. Est adeo TMR triangulum rectangulum (§. 77.), adeoque ob PM ad AR normalem (§. 251. 205.), $PR : PM = PM : PT$ & $PM : PT = MR : TM$, hoc est, in omni curva subnormalis est tertia proportionalis ad subtangentem & semiordinatam, & normalis est ad tangentem ut semiordinata ad subtangentem.

PROBLEMA XXIX.

473. *Determinare quantitatem subtangentis PT, & subnormalis PR in Parabola.*

Per punctum contactus M ducatur secans DS; & ex punctis M & S semiordinatæ PM, US; & MQ ipsi AU parallela. Sit $AP = x$, $PM = UQ = y$, MQ

Wolf. Mathef. E e = PU

$=PU=m$, $QS=n$. Erit abscissa $AU = x+m$, & semiordinata $US = y+n$; adeoque.

$$ax+am=y^2+2ny+n^2 \quad (\S. 455.)$$

Et ob $ax=y^2$ $am=2ny+n^2$

Si jam secans DS circa punctum M eo moveri concipiatur donec illa in tangentem TM degeneret, quantitates TD , MQ & QS respectu reliquarum evanescent; consequenter in æquatione ultima quadratulum n^2 respectu $2ny$ pro nihilo habendum: hinc $am=2ny$ & $m=2ny$: $a=QM$.

$$\text{Est vero } SQ:QM=MP:(PT+TD)$$

$$\text{Hoc est, } n:\overline{2ny}=y:(PT+TD)$$

$$\overline{a} \quad (\S. 207.)$$

$$\text{Ergo } PT+TD=\overline{PT+0}=PT=2ny:$$

$$an=2y^2: a=2ax: a=2x.$$

$$\text{Porro } PT:PM=PM:PR \quad (\S. 472.)$$

$$\text{Hoc est, } 2x:y=y:PR$$

$$\text{Ergo } PR=y^2=ax: 2x=\overline{\frac{1}{2}a}.$$

$$2x$$

Theorema. In parabola subtangens PT est abscissa AP dupla; subnormalis vero PR parametri subdupla, adeoque constans.

COROLLARIUM. I.

474. Quoniam $TA=x$ & distantia foci a vertice $AF=\frac{1}{2}a$ ($\S. 461$; erit $TF=\frac{1}{2}a+x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF ($\S. 464.$), consequenter TFM triangulum æquilaterum.

COROLLARIUM II.

475. Quoniam $PA = x$ & $AF = \frac{1}{2}a$ (§. 461.), erit $PF = x - \frac{1}{2}a$, consequenter cum sit $PR = \frac{1}{2}a$ (§. 473.) $FR = x + \frac{1}{2}a$, adeoque $FR = FM$ (§. 464.) $= TF$ (§. 474.). Circulus igitur ex foco parabolæ F per punctum ejus M . ductus subtangentem PT & subnormalem PR determinat, consequenter punctum T , ex quo ducitur tangens TM .

COROLLARIUM III.

476. Quodsi MN ducatur parallela axi AR , erit angulus $NMT = FTM$. (§. 192.). Cumque sit $TF = FM$ (§. 474.); erit $FTM = FMT$ (§. 155.), consequenter $FMT = NMT$ (§. 65. *Arithm.*).

DEFINITIO XIV.

477. *Ellipsis* est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem, hoc est, si $AB = a$, parameter $= b$. $PM = y$, $AP = x$, erit $b : a = y^2 : ax - x^2$ adeoque $ay^2 = abx - bx^2$.

Tab. XIII.
Fig. 160.

COROLLARIUM I.

478. Est ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam pro-

Ee 2 por.

portionalem ad axem, parametrum & abscissam.

COROLLARIUM II.

479. Fiat $y=0$, erit $bx-bx^2:a=0$, adeoque $abx=bx^2$, consequenter $a=x$. Patet adeo curvam secare AB in A & B, consequenter in se redire.

COROLLARIUM III.

480. Fiat $x=\frac{1}{2}a$. Erit $y^2=\frac{1}{2}ab-a^2b:4a=\frac{1}{4}ab$, consequenter $y=CD=\sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo $DE=2\sqrt{\frac{1}{4}ab}=\sqrt{ab}$, hoc est axis minor ED est medius proportionalis inter majorem AB & parametrum, consequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM IV.

$$481. \quad \begin{array}{l} \text{Quia } ay^2=abx-bx^2 \\ \text{erit } \frac{bx^2=abx-ay^2}{bx^2:(bx-y^2)=a} \end{array}$$

Invenitur ergo axis, parametro, abscissa & semiordinata, datis, si fiat I. $b:y=\frac{y^2}{b}$, 2. $x-y^2=\frac{(bx-y^2)}{b}:x=x:a$.

Tab. XIII. Nimirum sit axis AB positione datus & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abscissa AP & semiordinata PM, fiat AN=AQ=PM; ducta NF ipsi LQ parallela, erit AF=y^2:b, consequenter FP=x-y^2:k.

Con-

Continuetur LA in G, factaque AH=FP & AG=AP ducatur GB ipsi HP parallela; erit $AB=lx^2:(bx-y^2)$, adeoque axis quæsitus.

COROLLARIUM V.

482. Quia $ay^2=abx-bx^2$

$$\text{erit } ay^2:(ax-x^2)=b$$

consequenter 1. $x:y=y:y^2$ & 2. $a-x:$

$$\frac{y^2}{x}=a:b.$$

Tab. XIII.

Fig. 163.

Datis ergo axe AB, abscissa AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1. Fiat AI=PM & ex A per M. ducatur recta AL. 2. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 207.) ob $AP:PM=AI:LI$, $LI=y^2:x$, 3. producat PM in O, donec $PO=LI=y^2:x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4. In A excitetur perpendicularis GA=(ob $BP:PO=BA:GA$) $ay^2:(ax-x^2)$: quæ erit parameter AG.

COROLLARIUM VI.

$$483. y=\frac{V(abx-bxx)}{Va}=\frac{V(bx(ax-x))}{Va}$$

Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abscissæ BP semio dinata PN assignatur, si parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB & erecta perpendiculari PN, fiat PL=PH, tandemque super AL semicirculus describatur. Est enim

Fig. 3 . AB

$$AB(a) : GA(b) = BP(x) : PH(bx:a) \text{ \& } PN \\ = \sqrt{(AP \cdot PL)} = \sqrt{(a-x, bx:a)} = \sqrt{(bx^2:a)}.$$

PROBLEMA XXX.

Tab. XIU. 484. *Invenire distantiam foci a vertice AF.*
Fig. 160.

Sit $AB=a$, parameter $=b$, $AF=x$,
erit $FR=\frac{1}{2}b$ (§. 46c.) &

$$\frac{\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2}{b} \quad (\S. 477.)$$

$$\frac{\frac{1}{4}ab = ax - x^2}{x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab}$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$\frac{x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab}{\frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}}{\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}} = x$$

Constructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit $CL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens semicirculo super AL descripto in K, erit $CK = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$. Fiat itaque $CF = CK$; erit in F focus.

Aequatio secunda sequens suppeditat

Theorema: Si axis AB in foco F secetur; erit rectangulum ex segmentis axis AF, FB subquadruplum rectanguli ex parametro in axem seu quadrato axis dimidii minoris CD aequale.

COROL-

COROLLARIUM.

485. Distantia foci a centro est $=V$
 $(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)$; hoc est, quadratum ejus est dif-
 ferentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA XXXI.

486. *Invenire rationem ordinatarum* Tab. XIII.
 PM & pm in ellipsi. Fig. 160.

Sit $AE=a$, parameter $=b$, $AP=x$,
 $PM=y$, $Ap=z$, $pm=v$; erit

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned} \right\} (\S. 478.)$$

$$\text{Ergo } y^2 : v^2 = \frac{bx - bx^2 : a}{bz - bz^2 : a}$$

$$\text{h. e. } y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$$

feu $PM^2 : pm^2 = AP \cdot BP : Ap \cdot pB$

Theorema. In ellipsi quadrata semiordina-
 rum sunt inter se ut rectangula ex axis seg-
 mentis.

COROLLARIUM I.

487. Est igitur etiam $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP \cdot PB$,
 consequenter $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP \cdot PB$
 ($\S. 122. Arithm.$), hoc est quadratum axis
 minoris est ad quadratum majoris ut quadra-
 tum semiordinatæ ad rectangulum ex axis seg-
 mentis.

COROLLARIUM II.

488. Sit $CP=x$, erit $AP=\frac{1}{2}a-x$ & $PB=\frac{1}{2}a+x$, consequenter $AP \cdot PB=\frac{1}{4}a^2-x^2$.
Habemus adeo (§. 487).

$$\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : \frac{1}{4}a^2 - xx$$

hoc est $b:a=$

$$\frac{ay^2 = \frac{1}{4}a^2b - bx^2}{y^2 = \frac{1}{4}ab - bx^2 : a}$$

En æquationem aliam, quæ naturam ellipsis definit, abscissis a centro C computatis.

COROLLARIUM III.

489. Sit $CD=d$, $AC=r$, $PC=x$, erit $AP=r-x$ & $PB=r+x$, consequenter $AP \cdot PB=r^2-x^2=AC^2-PC^2$. Habemus ergo ut ante

$$\frac{d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2}{\text{unde } r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)}$$

$$y^2 = d^2 (r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem ellipsis naturam definit, abscissis denuo a centro C computatis.

COROLLARIUM IV.

490. Crescentibus adeo abscissis x , semiorde-
natæ decreſcere debent. Quodſi tandem fiat $x=r$
erit $r^2-x^2=0$, consequenter $y^2=0$, adeo
que ellipsis cum axe tandem concurrat. Un-
de porro intelligitur, ellipsin eſſe lineam in
ſe redeuntem.

PRO-

PROBLEMA XXXII.

491. *Determinare quantitatem recta- Tab. XIII.*
rum FM & fm ex utroque foco F & f Fig. 164.
ad idem peripheriæ punctum M ducta-
rum.

Sint $FC = fC = c$, reliqua ut ante:
 erit $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, PF
 $= c - \frac{1}{2}a + x$, adeoque $PF^2 = c^2 - ac +$
 $\frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2 = (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx -$
 $ax + x^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax$
 $+ x^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$. Est vero
 (§. 487.).

$$CB^2 : DC^2 = AP : PB : PM^2$$

$$\left[\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2 \right]$$

Habemus adeo

$$PM = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

$$PF^2 = (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$

$$FM^2 = (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

Et 5

Pf^2

PRO-

$$\begin{array}{r}
 Pf = (\frac{1}{2}a+c)^2 - 2cx - ax + xx \\
 fM = (\frac{1}{2}a+c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c}{aa}x^2 \\
 \hline
 fM = \frac{1}{2}a+c-2cx : a \\
 FM = \frac{1}{2}a-c+2cx : a \\
 \hline
 fM + FM = a = AB
 \end{array}$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM I.

492. Datis ergo axibus conjugatis ellipsis facillime describitur. Determinari enim focis F & f (§. 484.), clavi in iis designatur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, ellipsis designabitur.

COROLLARIUM II.

493. Immo eodem modo geometricè determinatur quodlibet punctum ellipseos M. Axis enim AB dividitur pro arbitrio utcumque in duas partes, & parte una ex foco F, altera ex foco f describitur arcus: duo enim hi arcus se mutuo secabunt in puncto M. Possunt autem una eademque opera quatuor simul determinari puncta, singula nempe in singulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PRO-

PROBLEMA XXXIII.

494. *Determinare subtangentem PT & subnormalem PR in Ellipti.* Tab. XIV.
Fig. 165.

Per punctum contactus M ducatur secans DS, & ex punctis M & S semiordinatæ PM & VS; QM vero axis parallela.

Sit axis major $= a$, parameter $= b$,
AP $= x$, PM $= y$, MQ $= m$, QS $= n$;
erit AU $= x + m$; & VS $= y + n$. Quoniam

$$ay^2 + 2any + an^2 = abx + abm - bx^2 - 2bmx - bm^2$$

$$\text{ \& } ay^2 = abx - bx^2 \quad (\S. 477.)$$

$$\text{Erit } 2any + an^2 = abm - 2bmx - bm^2$$

$$\text{ seu } (2ay + an)n = (ab - 2bx - bm)m$$

Si jam ut ante (§. 473.), secans DS circa punctum contactus M moveri concipiatur. donec ea in tangentem TM degeneret, quantitates TD, MQ, & QS respectu reliquarum evanescent; consequenter in æquatione ultima rectangulum an respectu $2ay$; & bm respectu $a^2 - 2bx$ pro nihilo habendum, erit adeo

$$2ayn = abm - 2bxm$$

$$\text{ \& } 2ayn : (ab - 2bx) = m$$

Quia QS:QM=PM:(PT+TD) (§. 207.)

$$\text{ seu } n : \frac{2ayn}{ab - 2bx} = y : (PT + TD)$$

Erit

$$\begin{aligned} \text{Erit } PT+TD &= PT+0=PT=\frac{2ay^n}{abn-2bxn} \\ &= \frac{2ay^2}{ab-2bx} = \left(\frac{2a}{ab-2bx} \right) \left(\frac{abx-bx^2}{a} \right) \\ (\S. 478) &= \frac{2abx-2abx^2}{ab-2abx} = (ax-x^2) : (\frac{1}{2}a-x) \end{aligned}$$

Habemus adeo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a - x : x &= a - x : PT \\ \text{five } PC : AP &= PB : PT \\ \text{Ergo } PB.PA &= CP.PT \end{aligned}$$

Theorema. In ellipsi rectangulum ex segmentis axis æquatur rectangulo ex distantia semiordinate a centro in subtangentem.

$$\text{Porro } PT : PM = PM : PR (\S. 472.)$$

$$\text{Hoc est } \frac{2ax-2x^2}{a-2x} : y = y : PR$$

$$\begin{aligned} \text{Ergo } PR &= \frac{(a-2x).y^2}{2ax-2x^2} = \left(\frac{a-2x}{2ax-2x^2} \right) \\ &\left(\frac{abx-bx^2}{a} \right) (\S. 478.) = \frac{a^2bx-3abx^2+2bx^3}{2a^2x-2ax^2} \\ &= (ab-3abx+2bx^2) : (2a^2-2ax) ; \text{ sed } \\ a^2b-3abx+2bx^2 &= (ab-2bx)(a-x), \\ \text{Ergo } \frac{a^2b-3abx+2bx^2}{2a^2-2ax} &= \frac{(ab-2bx)(a-x)}{2a(a-x)} \\ &= (\frac{1}{2}ab-bx) : a. \text{ Quæ expressio hanc } \\ &\text{suppeditat analogiam:} \end{aligned}$$

$$a : b = \frac{1}{2}a - x : PR$$

Theorema. In ellipsi est ut axis primus ad parametrum, ita distantia semiordinate a centro ad subnormalem.

Tan-

Tandem. $AT = PT - AP = (ax - x^2) :$
 $(\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) :$
 $(\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ Quare
 $\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a = x : AT$
 $PC : AC = AP : AT$

Theorema. Ut distantia semiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abscissa ad portionem subtangentis inter verticem ellipsis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

495. Quia $PC : AC = AP : AT$; erit $PC + AP : AC + AT = PC : AC$ (§. 135. *Ari hm.*).
 Hoc est, $AC : CT = PC : AC$, seu $PC : AC = AC : CT$.

COROLLARIUM II.

496. Est ergo $AC^2 = PC \cdot CT$ (§. 291.)
 hoc est quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC .

DEFINITIO XV.

497. *Hyperbola* est linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc est, $b : a = y^2 : ax + x^2$, seu quadratum semiordinatæ est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositum ex eadem abscissa & recta quadam constante, quæ *Axis transversus* vel *latus transversum* audit, ut recta alia constans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transversum.

COROLLARIUM

498. Est ergo etiam hic ut in ellipsi $y^2 = bx + bx^2$: a , $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bxx : (y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§. 478. & seqq.).

DEFINITIO .XVI.

499. In hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in ellipsi (§. 480.).

DEFINITIO XVII.

Tab. XII.
Fig. 156.

500. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C Centrum appellatur.

PROBLEMA XXXIV.

501. Datis parametro & axe transverso AB, invenire distantiam foci a vertice AF.

Sit parameter = b , $AB = a$, erit $FN = \frac{1}{2}b$ (§. 462. 497.).

$$b : a = \frac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\frac{1}{4}abc = \frac{1}{4}b^2x + \frac{1}{4}bxx$$

$$\frac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab) = \frac{1}{4}a + x$$

$$V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab) - \frac{1}{4}a = x$$

Invenitur adeo x querendo inter $\frac{1}{4}a$ & $\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b$ mediam proportionalem ac inde auferendo $\frac{1}{4}a$.

COROLLARIUM. I.

502. Est adeo distantia foci a centro $FC = V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)$. Quare si $FC = c^2$; erit $CE^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

(Co.

COROLLARIUM. II.

503. Quia $ax + xx = \frac{1}{4} ab$ & $ax + xx = AF \cdot FB$,
 $\frac{1}{4} ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§. 499.) ;
 rectangulum ex AF in FB huic
 quadrato æquale est.

PROBLEMA XXXV

504. *Invenire rationem semiordinatarum PM & pm.* Tab. XII.
Fig. 157.

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$,
 $AP = x$, $PA = y$, $Ap = v$, $pm = z$;
 erit (§. 498.).

$$y^2 : z^2 = \frac{bx + bxx}{a} : \frac{bv + bv^2}{a}$$

$$ax + xx : av + v^2 \text{ (§. 148. Arithm.).}$$

$$(a+x)x : (a+v)v$$

Theorema. In hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM

505. Crescentibus adeo abscissis x , cre-
 scunt quoque rectangula $ax + x^2$, consequen-
 ter & quadrata semiordinatarum y^2 , adeoque
 semiordinate ipsæ. Hyperbola igitur continuo
 ab axe recedit.

PROBLEMA XXXVI.

506. *Invenire rationem axis transversæ ad axem conjugatum.*

Si axis transversus $= a$, parameter $= b$,
 erit quadratum axis conjugati $= ab$
 (§. 499.). Hoc ergo ad quadratum trans-
 ver-

versū, ut ab ad aa , hoc est, ut b ad a (§. 348. *Arithm.*).

Theorema. Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversū, ut parameter ad axem transversum.

COROLLARIUM.

TAB. XII. 507. Quoniam $b : a = PM^2 : AP \cdot PB$ (§. 497.); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversū ut quadratum semiordinate ad rectangulum ex abscissa in compositum ex abscissa & axe transverso (§. 117. *Arithm.*).

PROBLEMA XXXVII.

508. Sint duæ hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes AX & BY cum axe transverso communi AB in directum jacent. Ex locis F & f ad punctum M hyperbolæ unius ducantur rectæ fm & Fm : determinare quantitatem harum rectarum.

Sit $FC = fC = c$, reliqua ut in precedentibus: erit $AF = c - \frac{1}{2}a$, $Af = c + \frac{1}{2}a$, $PF = c - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$, $PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$. Jam (§. 502.) quadratum semiaxis conjugati $CE^2 = cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§. 507.)

$$AC^2 : CE^2 = AP \cdot BP : PM^2$$

$$\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$$

Est

Est itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - 2cx - ac + \frac{1}{4}a^2 + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$fM = c + \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM I.

509. Datis ergo axe transverso & distantia Tab. XIV. Fig. 166.
foci a vertice, hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focus F & f defigan-
tur clavi aut paxilli, quorum alteri in F an-
nectatur filum FMC , altero sui extremo C
regulæ Cf alligatum, quæ ipsum superet axe
transverso AB . Altera regulæ extremitas
perforata clavo f injiciatur & stilo ad filum
applicato regula emoveatur.

Wolf. Mathes.

F f

Co.

COROLLARIUM II.

§10. Iisdem datis puncta quocunque hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo quocunque Af majore describatur arcus, facto $fb = AB$, intervallo residuo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m interfecans: erit enim ob $fm - Fm = AB$, m punctum hyperbolæ (§. 508.).

DEFINITIO XVIII.

Tab. XIV.

Fig. 168.

§11. Si recta DE per verticem hyperbolæ A ordinatis M m parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE femiaxi; præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG : rectæ hæc dicuntur *Asymptotihyperbolæ*.

COROLLARIUM I.

§12. Quoniam (§. 207.) $CA : EA = CP : Pr$ & $CA : (DA) AE = CP : PR$; erit $Pr = PR$ (§. 126. *Arithm.*). Quare cum sit $PM = Pr$ (§. 448.); erit quoque $MR = mr$ (§. 69. *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

§13. Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE ; erit $EA : ED = AI : DC$ (§. 207.) Sed $EA = \frac{1}{2} ED$ (§. 511.). Ergo $AI = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} CE$. Et quoniam porro $EA : AD = EI : IC$ (§. 207.); erit $EI = CI = \frac{1}{2} EC$. consequenter $AI = CI$ (§. 65. *Arithm.*).
DE.

DEFINITIO XIX.

514. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia hyperbolæ*.

PROBLEMA XXXVIII.

515. *Determinare potentiam hyperbolæ.*

Sit $CA = \frac{1}{2}a$, $AE = c$, erit $CE = V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)$ (§. 319.) adeoque $CI = \frac{1}{2}V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)$. Ergo $CI^2 = \frac{aa+cc}{16}$.

16

Theorema: Potentia hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

PROBLEMA XXXIX.

516. *Determinare differentiam quadratorum. PM & PR* Tab. XIV. Fig 168.

Quoniam $DA = V\frac{1}{4}ab$ (§. 499.) & $CP = \frac{1}{2}a + x$; præterea (§. 207.)

$$CA : AD = CP : PR$$

$$\frac{1}{2}a : V\frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}a + x : PR$$

$$\text{erit } PR = (\frac{1}{2}a V\frac{1}{4}ab + x V\frac{1}{4}ab) : \frac{1}{2}a = V\frac{1}{4}ab + 2x V\frac{1}{4}ab : a. \text{ Quare}$$

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$

$$PM^2 = \frac{bx + bx^2 : a}{(\S. 498.)}$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2$$

Theorema. Si in hyperbola semiordinata PM producat, donec asymptoto in R occurrat;

F f 2

rat;

rat; erit differentia quadratorum PM & PR
æqualis quadrato semiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

517. Crescente adeo semiordinata PM,
decrefcit recta MR, adeoque hyperbola ad
afymptotum propius accedit. Nunquam tamen
cum ea concurrere potest, quia cum fit PR^2
 $- PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2$
 $= 0$ evadat.

SCHOLIUM.

518. *Enr rationem, cur lineas CFC³ CG ἀσυμ-
τώτως seu coincidentes vocaverint veteres.*

PROBLEMA XL.

519. *Determinare quantitatem rectan-
guli ex MR in Mr.*

Sit $PR = z$, $PM = y$: erit $MR = z - y$,
 $Mr = z + y$, consequent. $MR \cdot Mr = z^2 - y^2$
 $= PR^2 - PM^2$.

Theorema. In hyperbola rectangulum ex
MR & Mr æquatur differentię quadratorum
 PR^2 & PM^2 .

COROLLARIUM.

520. Idem ergo rectangulum æquale est
quadrato semiaxis conjugati DA (§. 516.).
consequenter omnia rectangula eodem modo
formata æqualia sunt.

PROBLEMA XLI.

521. Si QM & fm cum asymptoto Tab. XIV.
CG, qm & SM cum altera CF parallelæ Fig. 168.
ducantur; determinare rationem rectan-
gulorum QM. M₂ & qm. mf.

Sit $MR=mr=a$, $Rm=rM=b$; QM
 $=v$, $mq=z$. Erit (§. 207.).

$$RM:MQ=Rm:mf.$$

$$a:v = b:(bv:a)$$

$$rm:mq = rM:MS$$

$$a:z = b:(bz:a)$$

Est ergo MQ. $MC=bvz:a$ & mq .
 $mf=bvz:a$, consequenter MQ. $MS=mq$.
 mf .

Theorema. Si QM & mf cum asymptoto CG,
qm vero & MS cum altera CF parallelæ du-
cantur; rectangula ex QM in MS & qm in
mf æqualia sunt.

COROLLARIUM.

522. Quoniam $Cq=fm$ & $CQ=SM$ etiam
rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM æqua-
lia sunt.

PROBLEMA XLII.

523. Determinare rationem rectangu- Tab. XIV.
li ex qm in mf ad potentiam hyperbolæ Fig. 168.
seu AI².

Sit $mr=z$, $qm=y$, $AE=c$: erit, ob
parallelas AE & Pr, ang. $E=r$, & ob

Ff 3

pa-

parallelas AI & qm , ang. $I=q$ (§. 182.); consequenter (§. 206.).

$$mr : qm = AE : AI$$

$$z : y = c : \frac{cy}{z}$$

Porro ob mR . $mr = AE^2$ (§. 520.) erit (§. 212. *Arithm.*)

$$mr : AE = AE : mR$$

$$z : c = c : \frac{cc}{z}$$

Denique ob parallelas fm & MQ (§. 207.)

$$MR : MQ = mR : mf$$

$$z : y = \frac{c^2}{z} : \frac{cy}{z^2}$$

Est enim $mr = MR$ (§. 512.), cumque sit
 $mr : qm = AE : AI$

& $MR : QM = DA : HA = AE : AI$ per *demonstr.*, etiam $MQ = mq$ (§. 126. *Arithm.*). Quare $fm, qm, Cq. mq = cc y^2 : z^2$. Est vero etiam $AI^2 = (c^2 y^2) : z^2$. Ergo $fm, qm = AI^2$

Theorema. Si qm cum asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex qm in Cq æquatur potentia hyperbolæ.

COROLLARIUM I.

524. Quare si fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ est æquatio naturæ hyperbolæ intra asymptotos declarans.

Co-

COROLLARIUM II.

Tab. XIV.
Fig. 167.

525. Datis ergo asymptotis positione & latere potentiae hyperbolae CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissae quotcunque, inveniuntur totidem semiordinatae & per eas puncta quotlibet hyperbolae determinabuntur, quaerendo ad abscissas & latus potentiae CI tertias proportionales (§. 210.). Nimirum sint AB & AC asymptoti, AD=DI= a latus potentiae hyperbolae. Sit AP= x . Ducatur FG parallela ipsi AC & PN parallela ipsi DI; erit PN=DI= a . Ducatur AN secans DI in H: erit (§. 207.)

$$AP:PN=AD:DH$$

$$x:a = a:DH$$

adeoque DH= $a^2:x$. Quare si fiat PM (=y) =DH: erit y= $a^2:x$, consequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in hyperbola (§. 524.).

PROBLEMA XLIII.

526. Determinare in hyperbola sub-tangentem PT & subnormalem PR. Tab. XIII.
Fig. 159.

Si per punctum contactus M ducatur secans DS, & reliqua fiant ut (§. 473. & 494.); sitque axis transversus= a , parameter= b , AP= x , PM= y , MQ= m & QS= n ; erit AV= $x+m$ & VS= $y+n$.

$$ay^2 + 2any + an^2 = abx + abm + bx^2 + 2bmx + bm^2 \quad (\S. 497.).$$

Præterea $ay^2 = abx + bx^2$ (§. 497.).

Ff 4

adeo-

adeoque $2ay + an^2 = abm + 2bmx + bm^2$
 Seu $(2ay + an)n = (ab + 2bx + bm)m$

Si hic quoque, ut ante (§. 473. & 494.)
 fecans DS per motum circa punctum M
 in tangentem TM abire supponatur,
 rectangula an & bm respectu reliquorum
 rectangulorum æquationem ultimam in-
 gredientium pro nihilo haberi possunt;
 hinc

$$2ayn = abm + 2bmx$$

$$2ayn : (ab + 2bx) = m$$

Quia QS:QM=PM:(PT+TD) (§. 207.)

$$\text{Seu } n : \frac{2ayn}{ab + 2bx} = y : (PT + TD)$$

TD vero = 0, eodem modo quo (§. 494.)
 reperitur $PT = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x)$;
 adeoque $\frac{1}{2}a + x : x = a + x : PT$.

Theorema. In hyperbola est ut aggregatum
 ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam,
 ita aggregatum ex integro axe transverso &
 abscissa ad subtangentem.

Cum etiam sit $PT : PM = PM : PR$. (§.
 472. Sive $\frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} : y = y : PR$

$$\text{Erit } PR = \frac{(a + 2x)y^2}{2ax + 2x^2} = \left(\frac{a + 2x}{2ax + 2x^2} \right) \cdot \left(\frac{abx + bx^2}{a} \right) \quad (\S. 498.) = \frac{a^2bx + 3abx^2 + 2bx^3}{2a^2x + 2ax^2}$$

a^2b

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2b + 3abx + 2bx^2}{2a^2 + 2ax} = \frac{(ab + 2bx)(a+x)}{2a(a+x)} \\
 &= \frac{ab + 2bx}{2a} = \left(\frac{1}{2}a + x\right)b : a. \text{ Quare} \\
 &a : b = \frac{1}{2}a + x : PR.
 \end{aligned}$$

Theorema. In hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

$$\begin{aligned}
 \text{Denique } AT &= (ax + x^2) : \left(\frac{1}{2}a + x\right) - x \\
 &= (ax + x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : \left(\frac{1}{2}a + x\right) = \frac{1}{2}ax : \left(\frac{1}{2}a + x\right).
 \end{aligned}$$

Theorema. In hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita semiaxis transversus ad rectam AT inter verticem & tangentem interceptam.

PROBLEMA XLIV.

527. *Investigare naturam curvæ, quæ Tab. XIV. oritur, si conus ABC ita secetur, ut Fig. 170. sectionis axis DE sit lateri Coni AC parallelus, ipsum vero planum sectionis DLN ad basin sectionis triangularis AB perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI basi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 359.), consequenter cum uterque circulus HMI & A NB per sectionem triangularem ACB secetur in HI & AB & a sectione data in PM & LN; erunt cum HI & AB, tum PM & LN inter se parallelæ. Quare cum sit EN perpendicularis ad AB per *hypothesis* erit etiam PM perpendicularis ad HI, consequen-

ter cum DE & HI, itemque DE & AB
sint in eodem plano sectionis triangu-
laris, EN & PM etiam perpendiculares
sunt ad DE adeoque semiordinatæ ad
axem DE applicatæ (§. 446. 448.). Et
quia AH parallela ipsi EP *per hypoth.*
HP parallela ipsi AE *per demonstr.* erit HP
= AE. Sit jam AE = HP = v , PI = t , DP
= x , DE = z ; erit (§. 207.).

$$DP:DE=PI:EB$$

$$x:z = t:\frac{tz}{x}$$

Ergo $PM^2 = HP \cdot PI$ (§. 454.) = tv
& $EN^2 = AE \cdot EB$ (§. cit.) = tzv : x . Est
ergo (positis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

$$y^2:q^2=tv:\frac{tzv}{x}$$

hoc est $tvx:tzv$ (§. 348. *Arithm.*).

$$x:z$$

Est itaque curva DMNLD parabola
(§. 467.).

PROBLEMA XLV.

Tab. XIV. 528. Si conus ABC ita secetur, ut
fig. 169 axis sectionis DE cum diametro basis
AB continuata in F concurrat, & pla-
num sectionis continuatum eam ad angu-
los rectos secet, invenire naturam curva
ex hac sectione prodeuntis DMNELD.

Eodem, quo ante (§. 527.) modo o-
stenditur esse PM & QN cum semiordi-
natas

natas. circulatorum IMH & LNK, tum
curvæ DMNE. Sit jam $DE=a$, $DP=x$,
 $DQ=v$, $PH=t$, $QL=f$; erit $PE=a$
 $-x$, $QE=a-v$ & (§. 207.).

$$DP:PH=DQ:QK$$

$$x:t=v:vt$$

$$x$$

$$EP:QL=EP:PI$$

$$a-v:f=a-x:\frac{fa-fx}{a-v}$$

Quare (§. 454.) $PM^2=HP \cdot PI=(tfa$
 $-tfx):(a-v)$ & $QN^2=KQ \cdot QL=vtf$:
 x . Est adeo

$$PM^2:QN^2=\frac{tfa-tfx}{a-v}:\frac{vtf}{x}$$

hoc est $tfax-tfx^2:avtf-v^2tf$ (§.
348. *Arithm.*) $ax-x^2:av-v^2$

Est itaque curva DMNELD Ellip-
fis (§. 486.).

PROBLEMA XLVI.

529. Si Conus ABC ita secetur, ut Tab. XIV.
axis sectionis DQ continuatus cum latere Fig. 171.
Coni AC continuatus in E concurrat, planum
vero sectionis DLN secet diametrum ba-
sis AB ad angulos rectos; invenire natu-
ram curvæ DLN, quæ ex hac sectione
resultat.

Eodem modo, quo paulo ante (§. 527.),
ostenditur, QN & PM esse semiordina-
tas cum circulatorum HMI atque ANB,
tum curvæ DMN.

Sit

Sit $ED=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$,
 $PI=f$; erit $EP=a+x$, $LQ=a+v$ &
 (§. 207.)

$$EP:PH=EQ:AQ$$

$$a+x:t = a+v:\frac{at+vt}{a+x}$$

$$DP:PI=DQ:QB$$

$$x:f = v:\frac{fv}{x}$$

Ergo $HP \cdot PI = tf$ & $AQ \cdot QB = (atfv + v^2tf) : (ax + x^2)$, coniequenter ob
 $PM^2 = HP \cdot PI$ & $QN^2 = AQ \cdot QB$ (§. 454.).

$$PM^2:QN^2 = tf:\frac{atfv+v^2fv}{ax+x^2}$$

hoc est,

$$1:\frac{av+v^2}{ax+x^2}$$

(§. 348. *Arithm.*) $ax+x^2:av+v^2$

Est itaque DLN hyperbola (§. 504.),
 DE ejus axis transversus, E vertex hy-
 perbolæ oppositæ.

SCHOLIUM.

§30. Hinc intelligimus, quod statim ab initio
 parabolam, hyperbolam atque ellipsin tanquam ex Cono
 sectionis proponere & ex indole sectionis æquationem
 fundamentalem erigere licuisset, nisi nobis constitutum
 fuisset ostendere, quomodo ex æquationibus utrunque
 assumtis vel datis curvarum proprietates ac descrip-
 tiones per algebram & arithmeticam speciosam erigere
 debeamus.

ELE-



ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

CAPUT I.

DE

CONSTRUCTIONE CANONIS, SINUUM, TANGENTIUM ATQUE SECANTIUM.



DEFINITIO I.

I. *Trigonometria plana* est scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas. E. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.

Tab. I.
Fig. 1.

DEFINITIO II.

2. Sinus rectus AD arcus AE & A est chordæ AB arcus dupli AEB dimidium.

Tab. I.
Fig. 2.

Si-

462 ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ

Sinus totus est radius HC seu sinus Quadrantis HE. *Sinus versus* est pars radii ED inter sinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 525. *Geom.*): consequenter sinus omnes eidem radio insistentes inter se paralleli (§. 200. *Geom.*).

COROLLARIUM II.

4. Quoniam arcus AE est mensura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 45. *Geom.*): quadrans vero HE mensura anguli recti (§. 120. *Geom.*): AD etiam sinus rectus & ED sinus versus est angulorum ACE & ACI: sinus vero totus est sinus anguli recti.

COROLLARIUM III.

5. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps eundem habent sinum.

COROLLARIUM IV.

6. Angulorum adeo obtusorum sinus iidem sunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 124. *Geom.*).

DEFINITIO III.

Tab. 1. 7. *Tangens* arcus EA est portio rectæ
fig. 2. tangentis circulum EF inter rectas ex
centro C per extrema arcus E & A du-
ctas

tas interceptæ. Recta FC dicitur *Secans* ejusdem arcus.

COROLLARIUM I.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis est (§. 232. *Geom.*).

COROLLARIUM II.

9. Est etiam FE tangens & FC secans anguli ACE, itemque ACI (§. 45. *Geom.*).

COROLLARIUM III.

10. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eandem habent tangentem atque secantem.

DEFINITIO IV.

11. *Cofinus* est sinus; *Cotangens* tan- Tab. I.
gens; *Cofecans* secans arcus AH, qui Fig. 2.
est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita e. gr. AG sinus arcus AH dicitur *Cofinus* arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes* atque *Secantes complementi*.

THEOREMA I.

12. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 224. *Geom.*) Sed sinus sunt chordarum dimidia (§. 2.). Ergo & hi ad radios rationem

nem eandem habent (§. 130. *Arithm.*).
Q. e. d.

HYPOTHESIS.

13. Sumatur radius pro unitate & per eius fractiones decimales determinetur quantitas sinuum, tangentium atque secantium.

SCHOLIUM.

14. In tabulis sinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in 10000000 partes divisus & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. Qui tamen tabulas istas construxerunt, ad fractiones multo minores descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ problemata absque illarum ope solvi possint.

COROLLARIUM.

15. Cum latus hexagoni regularis sextam circuli partem subtendat (§. 90. 264. *Geom.*) atque radio æquale sit (§. 274. *Geom.*); sinus graduum triginta est 5000000 (§. 2. *Trigon.* & §. 33. *Geom.*).

PROBLEMA I.

16. Dato sinu AD, invenire cosinum AG.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. I. Quoniam EC sinus ipsius EH (§. 2.)
Fig. 2. ad HC; & AG sinus arcus AH (§. 2.) perpen-

pendicularis ad eandem HC (§. 3.); erit AG parallela ipsi DC (§. 200. *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 66. *Geom.*). adeoque $\triangle AGC$ rectangulum (§. 77. *Geom.*). Quare cum AD & GC sint ad EC perpendiculares (§. 3.); erit $G = AD$ (§. 69. *Geom.*). si ergo

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC: relinquetur quadratum Cofinus AG (§. 319. *Geom.*). Unde si

2. Radix quadrata extrahatur (§. 190. *Arithm.*); prodibit Cofinus AG

E. gr. Sit AC 10000000; AD 5000000: reperietur AG 8660254, sinus 60° .

PROBLEMA II.

17. Dato sinu AD arcus AE, invenire sinum arcus dimidii $\frac{1}{2}$ AE. Tab. I.
Fig. 2.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§. 324. *Geom.*). Hujus enim dimidium est ejus sinus (§. 2.).

E. gr. Sint AC & AD ut in probl. præc: reperietur sinus arcus $\frac{1}{2}$ AE seu sinus $15^\circ = 2588190$.

PROBLEMA III.

18. Dato sinu DG arcus DF, invenire sinum DE arcus dupli DB. Tab. I.
Fig. 3.

466 ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ
RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§. 3.) & angulus B utrique triangulo BCG & DEB communis; erit $BC : CG = BD : DE$ (§. 206. *Geom.*). Quare cum CG inveniri possit, dato sinu DG (§. 16.), & BD sit duplum ipsius DG (§. 2.): invenietur quoque DE (§. 215. *Arithm.*). Q. e. f. & d.

PROBLEMA IV.

Tab. I.
Fig. 4.

19. *Datis sinibus FG & DE arcuum FA & DA, quorum differentia DF 35' major non est, invenire sinum quemcunque intermedium IL.*

RESOLUTIO.

1. Quærat^r ad differentiam arcuum FD, quorum sinus dantur, differentiam arcus, cujus sinus quæritur, AI atque arcus AF sinui dato minori respondentis IF & differentiam sinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§. 215. *Arithm.*).
2. Is addatur sinui dato minori FG. Erit aggregatum sinus quæsitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum sint minutorum, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem sensibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ sunt (§.

(§. 3.). Quare si ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 177. *Geom.*); erit $HE=FG$ (§. 69. *Geom.*), adeoque DH differentia sinuum datorum FG & DE (§. 43. *Arithm.*). Unde ob parallelas IK & DH *per demonstrata*; $DF:FI=DK:IK$ (§. 207. *Geom.*). Q. e. d.

PROBLEMA V.

20. *Datis sinibus BD & FE duorum arcuum quorumcunque AB & AF, invenire sinum arcus semidifferentiæ eorundem $\frac{1}{2}$ BF.* Tab. I.
Fig. 5.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD subtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
 2. Ex datis sinibus BD & FE inveniantur Cosinus BI & FH (§. 16.).
 3. Cosinus minor FH subtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
 4. Ex summa quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 100. *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§. 2.).
- Q. e. i.

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, cum AC, BI & FA inter se parallelæ & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3.), consequenter $FH=KI$ & $BD=EK$ (§. 69. *Geom.*)

& angulus BKF rectus (§. 181. 66. *Geom.*).
 Quamobrem FK differentia sinuum BD
 & FE, BK vero differentia cosinuum
 FH & BI atque FKB triangulum re-
 ctangulum (§. 77. *Geom.*). Ergo cum
 fit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§. 319. *Geom.*);
 reperietur chorda BF, si ex summa
 quadratorum differentiarum sinuum FK &
 cosinuum BK radix quadrata extrahitur
 (§. 171. *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA VI.

Tab. I.
 Fig. 2.

21. Invenire sinum 45. graduum

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Sit HI circuli quadrans; erit HCI an-
 gulus rectus (§. 120. *Geom.*), adeoque
 Δ cognomine rectangulum (§. 77.
Geom.), consequenter $HI = HC^2 + CI^2$
 (§. 319. *Geom.*). $= 2 HC^2$ (§. 32. 288.
Geom.). Quare cum HC sinus totus (§. 2.)
 sit 1000000 (§. 14.); si ex $2 HC^2$
 quadrato 2000000000000 extrahatur
 radix 14142136. (§. 190. *Arithm.*); pro-
 dibit chorda HI (§. 171. *Arithm.*), cu-
 jus dimidium 7071068 sinus 45° deside-
 ratus. Q. e. i. & d.

SCHOLIUM.

22. Cum dato radio latus pentagoni regularis,
 scilicet chorda 72°; inveniri possit (§. 434. *Geom.*),
 illius dimidium erit sinus 36° (§. 2.). Datis ita-
 que sinibus 30° (§. 15.), 15° (§. 17.), 45°
 (§. 21.)

(§. 21.) & 36° canon omnium sinuum construi potest: uti docetur in Elementis Matheseos universæ §. 25. Trigonom.

PROBLEMA VII.

23. Dato sinu unius minuti seu $60''$ FO, Tab. I.
invenire sinum unius vel aliquot secundorum Fig. 4.
MN.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF sunt admodum exigui, AMF pro linea recta haberi potest citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus sinus exprimimus assignabilem, hoc est, arcus AM & AF sinibus eorum proportionales assumere licet. Quare cum MN sit ipsi FG parallela (§. 3.); erit $AF:FG=AM:MN$ (§. 207. Geom.). Datis ergo AF, FG & AM, per hypoth. invenitur MN (§. 215. Arithm.). Q. e. i. & d.

SCHOLION.

24. Eadem ratione si opus foret, inveniri posset sinus aliquot scrupulorum tertiorum.

PROBLEMA VIII.

25. Dato sinu AD arcus AE inveni- Tab. I.
re tangentem EF & secantem FC ejus- Fig. 2.
dem arcus.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quia sinus AD & tangens FE ad radium EC perpendicularis (§. 3. 8.); erit ille huic parallelus (§. 200. Geom.). Quare ut Cofinus DC ad sinum AD, ita sinus totus ad tangentem EF: item ut Cofinus DC ad sinum totum AC,

Gg 3

ita

470 ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ

ita sinus totus EC ad secantem CF (§. 207. Geom.). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram secans FC (§. 215. Arithm.) Q. e. i. & d.

SCHOLIUM.

26. Constructo igitur Canone sinuum (§. 22.), haud difficilis est constructio Canonis tangentium atque secantium.

CAPUT II. DE ANALYSI TRIANGULORUM.

THEOREMA II.

Tab. I.
Fig. 2.

27. Tangens 45° EF æquatur radio EC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45° per hypoth. erit quoque angulus ACE 45° (§. 47. Geom.), consequenter angulus F 45° (§. 188. Geom.). Quare EF = CE (§. 198. Geom.). Q. e. d.

THEOREMA III.

Tab. I.
Fig. I.

28. In omni triangulo ABC latera sunt ut sinus oppositorum angulorum.

DE

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inscriptibile sit (§. 230. *Geom.*); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 30. *Geom.*), consequenter latera dimidia sinus arcuum dimidiorum (§. 2.). Sed arcus dimidii sunt mensuræ angulorum oppositorum B, A & C (§. 238. *Geom.*). Ergo ut latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B; ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A, ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C.

Q. e. d.

PROBLEMA IX.

29. *Datis duobus angulis A & C, una cum latere uni eorum C opposito AB, invenire latus alteri A oppositum BC.* Tab. I.
Fig. I.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 28.):

ut sinum anguli C

ad latus sibi oppositum datum AB

Ita Sinus anguli alterius A ad latus quæsitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC per §. 267. *Arithm.*

E. gr. Sit $C=48^{\circ} 35'$, $A=57^{\circ} 28'$,
 $AB=74'$. Calculus talis erit:

Gg 4

Log.

472 ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ

Log. Sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. Sin. A	9.9258681
Sum. Log. AB & Sin. A.	11.7950998
Log. BC.	1.9200856.

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent 83'. Cum vero logarithmus in tabulis non exactus reperiatur; inveniri possunt numeri inventi 83' fractiones decimales, hoc est in casu nostro digiti, si sub characteristica 2 post 830" denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxima respondet numerus 8.1". Quodsi præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post 8310''' & ei quam proxime respondere deprehendes 8319''' Immo si canon major ad manus sit ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post 83190''' evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192. Est ergo BC 8° 3' 1" 9''' 2'''' (§. 263.) *Arithm.*).

SCHOLIUM.

30. Quid factu opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in *Arithmetica* loco citato docuimus.

PROBLEMA X.

31. Datis duobus lateribus AB & BC una cum angulo C uni eorum opposito, invenire angulos reliquos A & B.

RE-

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 28.);

ut latus unum AB

ad finum anguli dati sibi oppositi C:

Ita latus alterum BC

ad finum anguli quæsiti sibi oppositi A.

Invenietur adeo logarithmus sinus anguli A, utendo logarithmis, per §. 267. *Arithm.*

II. Quodsi latus AG vel AB dato angulo C oppositum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæsito, quæsitus angulus & obtusus esse potest, & acutus B (§. 183. *Geom.*) adeoque constare debet, utrum triangulum datum sit obtusangulum, an acutangulum. In casu posteriori satisfacit numerus graduum, qui sinui reperto respondet; in priori pro angulo obtuso sumitur ejus complementum ad 180° (§. 6.).

Tab. I.
Fig. 8.

III. Quodsi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtusus & datis præterea cruribus AG & AC quærat acutus, in solutione pro sinu obtusi anguli AGC sumitur deinceps positi acuti AGE sinus (§. 6.).

Tab. I.
Fig. 8.

474 ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ

Tab. I.
Fig. I.

E. gr. Sit $AB=94'$, $BC=69'$, $C=72^\circ 15'$.

Log. AB	1.9731279
Log. Sin. C	9.9788175
Log. BC	1.8388491
Sum. Log. Sin. C & BC	11.8176666
Log. Sin. A	9.8445387

cui in canone proxime respondent $44^\circ 21'$.
Quodsi Canon major non fuerit ad manus &
præter scrupula prima etiam secunda deside-
rentur, *vi probl. 4. (§. 19.)* hunc in modum in-
veniuntur.

A logarith. invento 98445387 subtrahe
Tabul. prox. min. 98445018

& notetur Differ. I. 369
Simil. ex prox. maj. 98446310 subduc
prox. min. 98445018

& notetur Diff. II. 1292

Inferatur: 1292: 60 = 369

2) 646: 30 30

11070(17

646:

4610

4522

88

Est ergo angulus $A = 44^\circ 21' 17''$

Sed $C = 72^\circ 15' 0''$

Quare $A + C = 116^\circ 36' 17''$

Quon. $A + C + B = 179^\circ 59' 60''$

erit $B = 63^\circ 23' 43''$

Si-

CAP. II. DE ANALYSI TRIANGUL. 475

Similiter dentur in triangulo rectangulo Tab. I.
præter rectum A hypotenusa BC & cathe- Fig. 6.
tus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49' AC
36'. Calculus talis erit:

Log. BC. 1.6901961

Log. Sin. tot. 10.0000000

Log. AC. 1.5563025

Log. Sin. B. 9.8661064, cui in
canone proxime respondent 47° 16'.

Ergo C=42° 44' (§. 188. Geom.).

Quodsi AG=349", AC=382", angulus

C=57° 25'; erit

Log. AG 2.5428254

Log. Sin. C 9.9256261

Log. AC 2.5820624

Sum. Log. Sin. C & AC 125.076895.

Log. Sin. G 99648641,

cui in Canone proxime respondent 67° 15'.
Est igitur angulus acutus G in triangulo AEG
67° 15': quem si subtraxeris ex 180°, relin-
quetur pro obtuso AGC 112° 45'.

Detur denique in triangulo obtusangulo AGC
angulus obtusus G 165° 17', una cum cruribus
AG=179" & AC 223" pro acuto C. Infe-
ratur (§. 28. 6.):

Log. AC 2.3483049

Log. Sin. AGC 9.4049009

Log. AG 2.2528530

Sum. Log. Sin. G & AG 11.65775.39

Log. Sin. C 9.3094490, cui
in Canone respondent quam proxime 11° 46'.

Pro-

Tab. I.
Fig. 8.

PROBLEMA XI.

32. *Datis duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A invenire angulos reliquos.*

RESOLUTIO.

Tab. I.
Fig. 6.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumpto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 7. 8.). Inferatur ergo:

ut crus unum AB

ad alterum AC:

ita finus totus

ad tangentem anguli B.

E. gr. Sit BA 79', AC 54': erit

Log. BA 1.8976271

Log. AC 1.7323938

Log. Sin. Tot. 10.0000000

Log. Tang. B. 9.8347667, cui in Canone respondent quam proxime $34^{\circ} 21'$. Ergo angulus C $55^{\circ} 39'$ (§. 188. Geom.).

Tab. I.
Fig. 7.

II. Si angulus A fuerit obliquus;

I. inferatur:

ut summa laterum datorum AB & AC

ad differentiam eorundem:

ita tangens semisummæ angulorum quæditorum C & B.

ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

2. Ad-

2. Addatur semidifferentia ad semisum-
mam; aggregatum erit angulus major
C. Eadem a semisumma subtrahatur,
residuus fiet angulus minor B.

E. gr. Sit AB 75', AC 58', A 108° 24':
erit

AB 75	AB 75	A + B + C	179° 60
AC 58	AC 58	A	108 24
Sum. 133	Diff. 17	B + C	71 36
		$\frac{1}{2}(B+C)$	35 48
Log. AB + AC		2.	1238516
Log. AB - AC		1.	2304489
Log. Tang. $\frac{1}{2}(B+C)$			9. 8580694
Summa Log.			11. 0885183
Log. Tang. $\frac{1}{2}(C-B)$			8 9646667, cui in
tabulis proxime respondent 5° 16'.			
$\frac{1}{2}(B+C) = 35° 48'$	$\frac{1}{2}(B+C) = 35° 48'$		
$\frac{1}{2}(C-B) = 5 16$	$\frac{1}{2}(C-B) = 5° 16'$		
C = 41° 4'	B = 30° 32'		

DEMONSTRATIO.

Crure majore dato AB ex vertice an-
guli dati A describatur circulus (§. 110.
Geom.), & crus minus AC utrinque con-
tinuetur (§. 15. Geom.), donec circulo
in E & D occurrat. Erit ob AE = AB
= AD (§. 32. Geom.) CE summa laterum
datorum, CD differentiae eorundem. Quo-
niam DE diameter. (§. 31. Geom.); erit
EBD semi circulus (§. 112. Geom.), conse-
quenter angulus EBD rectus (§. 241. Geom.
adeo-

adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 66. *Geom.*). Quare si BD fumatur pro finu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 7. 8.). Est vero $o = x + y$ (§. 186. *Geom.*) & inde ob $u = \frac{1}{2} o$ (§. 237. *Geom.*), $u = \frac{1}{2} (x + y)$. Ergo EB tangens semisummæ angulorum quæstitorum x & y . Quoniam $x = u + n$ (§. 186. *Geom.*); erit n semidifferentia angulorum x & y (§. 360. *Arithm.*) Sumto itaque DB de novo pro radio si describatur arcus DG (§. 110. *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 195. *Geom.*): erit DF tangens anguli n (§. 7. 8.), hoc est, semidifferentiæ angulorum quæstitorum x & y per *demonstr.* Jam cum anguli EBD & FDB sint recti per *demonstr.* & hinc FD & FB parallelæ (§. 200.), adeoque PED & FDE æquales (§. 192. *Geom.*) item verticales ad C æquales (§. 122. *Geom.*); erit $\angle E : BF = D : DF$ (§. 206. *Geom.*), consequenter & $\angle E : DC = BF : DF$ (§. 122. *Arithm.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæstitorum semidifferentia, reliqua in resolutione manifesta sunt per (§. 360. *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA XI.

Tab. I. 22. *Datis tribus lateribus AB, BC*
 Fig. 8. & CA, invenire angulos A, B & C.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A latere minimo AB describatur circulus (§. 110. *Geom.*) erit, ob $AD=AB$ (§. 32. *Geom.*), CD summa crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 255. *Geom.*): ut Basis BC.

ad summam crurum CD;

Ita differentia crurum CF ad segmentum basis CG.

2. Inventum adeo segmentum CG (§. 215, *Arithm.*) si subtrahatur a basi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 177. *Geom.*); erit $BE=EG=\frac{1}{2}GB$. (§. 225. *Geom.*). Datis adeo in triangulo rectang. AEB lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque C (§. 31.). Q. e. f. & d.

E. gr. Sit $AB=36'$, $AC=45'$, $BC=40'$: erit

$$AC=45'$$

$$AB=36$$

$$AC+AB=81$$

$$\text{Log. BC} = 1.6020600$$

$$\text{Log. AC+AB} = 1.9084850$$

$$\text{Log. FC} = 0.9542425$$

$$\text{Log. summa} = 2.8627275$$

Log.

Log. $CG = 1.2606675$,
 cui in tabulis quam proxime respondent $18^{\circ} 2'' 2'''$ (§. 263. *Arithm.*).

$$BC = 4000''$$

$$CG = 1822''$$

$$BG = 2178''$$

$$BE = 1089''$$

$$EG = 1089''$$

$$CG = 1822''$$

$$CE = 2911''$$

$$\text{Log. } AB = 3.5563025$$

$$\text{Log. Sin. tot.} = 10.0000000$$

$$\text{Log. } EB = 3.0370279$$

Log. Sin. $EAB = 9.4807254$, cui in
 tabulis quam proxime respondent $17^{\circ} 36'$,
 adeoque angulus $ABE 72^{\circ} 24'$ (§. 188. *Geom.*)

$$\text{Log. } AC = 3.6532125$$

$$\text{Log. Sin. tot.} = 10.0000000$$

$$\text{Log. } CE = 3.4640422$$

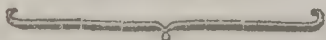
Log. Sin. $\angle AC = 9.8108297$, cui in
 tabulis quam proxime respondent $40^{\circ} 18'$.
 Ergo $\angle ACE 49^{\circ} 42'$ (§. 188. *Geom.*) & $\angle CAB$
 $57^{\circ} 54'$ (§. 64. *Arithm.*)





CAPUT III.

DE

 USU TRIGONOMETRIÆ
 PLANÆ IN GEOMETRIA
 PRACTICA.


PROBLEMA XIII.

 cui in
 17°36',
 (Geom.)

34. *Construere instrumentum transportatorium rectilineum, hoc est, scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtense arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

 cui in
 40°18'.
 & CAB

- i. Ex communi canone sinuum excerpantur sinus arcuum 2°30', 5°, 7°30', 10°, 12°30', &c. nempe in progressionem arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est 2½. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§, 2.): ut hic in tabella factum vides.

A.

Wolf. Mathes.

Hh

Gr.

Gr	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	742.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

Tab. II. 2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 195. *Geom.*)
Fig. 9. pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel partes quartas &c. indicare debent subtensæ.

3. Per singula divisionum puncta agantur rectæ ipsi AD parallelæ (§. 202. *Geom.*).
4. In lineam AD, incipiendo semper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35° &c. respondentes ex scala geometrica in particulas minutissimas divisa (§. 213. *Geom.*): in linea vero superiori BC eodem modo designentur

tur particulæ chordarum responden-
tes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c.
Quodsi scala geometrica non continet
particulas adeo minutas, quales de-
siderantur; utendum est chordis di-
midiis: quod perinde ac si particulæ
in scala bifariam dividerentur. Ne-
gligenda autem est nota puncto a re-
liquis separata, vel si major fuerit,
ejus loco addenda est unitas ultimæ
earum, quæ retinentur. E. gr. loco
258. 8 assume 259. Ultimas nimi-
rum notas ideo adjecimus, ut ap-
pareret, quomodo earum dupla pro
chordis computata fuerint.

3. Ducantur transversæ ex B in 5 ex
5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20,
ex 20 in 25 &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. sint chordæ
5, 10 &c. graduum & chordæ a quinis
ad quinos gradus fere arcibus propor-
tionaliter crescant: erit c 1 subtensa ar-
cus 1°, d 2 subtensa 2 &c. graduum (§.
207. *Geom.*).

COROLLARIUM I.

35. Quia subtensa 60° est radius (§. 274.
Geom.); anguli quantitatem investigaturus in-
tervallo B 60 describat ex vertice anguli
intra crura ejus arcum, qui est mensura ip-
sus (§. 45. *Geom.*), & ejus chordam ad

H h 2

fea-

scalam applicet, quæ, si e. gr. ex $d.$ in 42 pertingat, ostendit angulum esse 42° .

COROLLARIUM II.

Tab. II. 36. Angulus datæ quantitatis construetur,
Fig. 10. si radio B C O describatur ex centro B arcus CF & subtensa gradus dati e. gr. 23, in scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC mensura anguli B (§. 45. *Geom.*), adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 47. *Geom.*).

SCHOLIUM.

37. *Hujus instrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in scrupulis satis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA XIV.

38. *Circulo polygonum regulare inscribere & circumscribere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Tab. II. I. Assumpto radio 10000 partium, qua-
Fig. II. les in Canone triangulorum habere supponitur, inde excerpatur sinus ejus arcus, qui prodit, peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni. aut (quod perinde est) semiperipheria, hoc est 180° , per numerum laterum polygoni divisa. Illius enim duplum est chorda arcus dupli (§. 2.). adeoque latus AB polygoni circulo inscribendi (§. 264. *Geom.*).

d. in 42

.

struetur,

B arcus

23, in

D. Erit

Geom.),

continet

tatem an-

explorari

lare in-

TIO.

a, qua-

ere sup-

us ejus

integra

aterum

t) semi-

merum

us enim

(§. 2.).

circulo

2. Quodsi radius circuli, cui e. gr. pentagonum inscribendum, detur juxta certam aliquam mensuram, e. gr. 345"; latus polygoni in eadem mensura invenitur per regulam trium (§. 215. *Arithm.*), inferendo nempe

$$1000 - 1176 - 3450''$$

$$3450$$

$$58800$$

$$4704$$

$$3528$$

$$4057 \overline{) 200} \begin{matrix} 4^{\circ} 0' 5'' 7'' \text{ Lat.} \\ \text{Pentag.} \end{matrix}$$

$$1 \overline{) 000}$$

3. Dato radio describatur circulus & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri potest (§. 264. *Geom.*).

4. Polygono regulari circulo inscripto simile circumscribetur (§. 273. *Geom.*).

SCHOLIION.

29. Ne molesta sit rationis lateris polygoni ad radii in ex canone flammæ investigatio, in tabula hic exhibentur latera polygonorum istiusmodi particulis expressa, quoniam radius habet 10000000: In præci tot notæ cæcis dexteram referantur, quot per circumscriptas singulares superflue judicabuntur.

Num. Later.	Quantitas Lateris.	Num. Later.	Quantitas Lateris.
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

PROBLEMA XV.

Tab. II. . 40. *Super data recta AB polygonum*
 Fig. II. *regulare describere: & dato polygono*
regulari ABCDE circumscriptum describere.

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut, ratione lateris ad radium ex tabula præcedente assumpta, queratur radius in ea mensura, in qua datur latus AB (§. 215. *Arithm.*).: dato enim latere AB & radio AL, polygonum describi potest (§. 264. *Geom.*). Si vero intervallo radii ex A & B super latere polygoni uno fiat intersectio in L, habebitur centrum L circumscribendi circuli (§. 29. *Geom.*).

PROBLEMA XVI.

41. *Datis sinu verso AB & sinu BC*
in mensura communi, non in particulis
ra.

radii decimalibus, invenire arcum FC in gradibus.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quærat^r ex his datis femidiameter AD (§. 250. *Geom.*). Tab. II.
Fig. 12.
2. Datis jam in triangulo DBC præter rectum B (§. 3.) lateribus BC & DC; invenitur angulus ADC (§. 31.): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 47. *Geom.*), cujus duplus est arcus FC (§. 225. *Geom.*) *Q. e. i.* & *d.*

SCHOLIUM.

42. Hujus problematis usus est in inveniend^o segmento circuli (§. 334. *Geom.*)

PROBLEMA XVII.

43. Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & angulis o & y; invenire diagonales. Tab. II.
Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. In $\triangle ABE$, datis duobus lateribus AB & AE, una cum angulo o invenitur primum angulus A (§. 31.); dein diagonalis BE (§. 29.).
2. Eodem modo resolut^o triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.*

PRO-

PROBLEMA XVIII.

Ta. II.
Fig. 13. 44. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus AB & BC, una cum diagonalibus BE & BD atque angulis o, x, & y; invenire latera reliqua CD, DE & EA.*

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE cum angulo intercepto o, invenitur primum angulus u (§. 32.) & deinde porro AE (§. 29.).

2. Eodem prorsus modo in triangulis reliquis BED & BCD investigantur latera ED & DC. Q. e. f.

PROBLEMA XIX.

Tab. II.
Fig. 13. 45. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & tot angulis, quot sunt latera, dentis tribus, C & D invenire diagonales BD & BE.*

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD, datis lateribus BC & CD cum angulo intercepto C, investigetur angulus m (§. 32), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus n, atque porro diagonalis BD (§. 29.)

2. Da.

2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE cum angulo intercepto n , eodem prorsus, quo ante modo reperitur diagonalis BE. Q. e. f.

PROBLEMA. XX.

46. Datis in figura rectilinea quacunque latere AB una cum angulis o , x , y , e , u , & n ; invenire diagonales AC, AD, BD, & BE una cum lateribus BC & AE. Tab. II. Fig. 14.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis o & B ($=e+u+n$) una cum latere AB inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 29.).
2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o+x$ & $e+u$ una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§. cit.)
3. Denique datis in triangulo ABE angulis A ($=o+x+y$) & e una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE. Q. e. f.

SCHOLIUM.

47. Cum ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus (§. 280. Geom.); horum problematum in planimetria usus est non contemnendus. Qui tam præ-

Wolf. Mathes. li

xi

xi operam dant, molestias calculi fugiunt; lucro magis, quam accurrationi intenti.

PROBLEMA XXI.

Tab. III. 48. *Metiri distantiam duorum locorum*
Fig. 15. *BC ex eodem tertio A accessorum.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumpto (§. 129. *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§. 109. *Geom.*).
2. Datis in $\triangle BAC$ duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A, inveniaturn primum angulus B. (§. 32.) & hinc porro distantia BC (§. 29.)
Q. e. f.

PROBLEMA XXII.

Tab. III. 49. *Invenire distantiam duorum loco-*
Fig. 16. *rum AC, quorum unus A tantum accessibilis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas angulorum A & B, statione in B electa (§. 129. *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 109. *Geom.*).
2. Inveniaturn AC (§. 29.). *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIII.

Tab. III. 50. *Invenire distantiam duorum lo-*
Fig. 17. *corum inaccessorum AB.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 129. *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 108. *Geom.*)
2. Investigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§. 109. *Geom.*).
3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180° , ut relinquantur anguli ACD (§. 125. *Geom.*) & CBE (§. 192. *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.
4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 29.) & hinc porro angulus CAB (§. 29.), tandemque AB (§. 32.).

PROBLEMA XXIV.

51. *Invenire altitudinem accessibilem*
AB.

Tab. III.
Fig. 18.

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa instrumentoque (§. 220. *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 129. *Geom.*).
2. Quæratu'r porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 109. *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 101. *Geom.*).

3. Cum adeo C sit rectus (§. 66. *Geom.*), in triangulo ACD invenietur AC (§. 29.).
4. Huic si addatur BC; prodibit altitudo integra AB. Q. e. i.

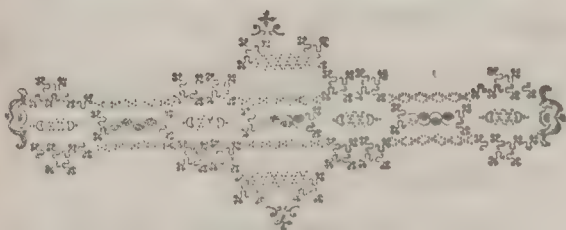
PROBLEMA XXV.

Tab. III. 52. *Metiri altitudinem inaccesſam*
Fig. 21. AB.

RESOLUTIO.

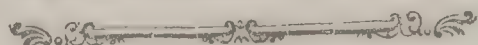
1. Eligantur duæ ſtationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 108. *Geom.*), tanto intervallo DF diſtantes, ut angulus FAD non ſit nimis exiguus, nec altera ſtatio G nimis vicina altitudini AB.
2. Inveſtigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 129. *Geom.*), itemque diſtantiæ FD longitudo (§. 109. *Geom.*).
3. Inveniatur primum in triangulo AFD ex datis angulo D. *per obſervationem*, & angulo AFD (§. 186. *Geom.*) & latere FD latus AF (§. 29.); dein ex notis in triangulo ACF præter rectum C angulo F & latere AF latus AG, itemque CF (§. 20.); tandem ex cognitis in triangulo FCB præter rectum C angulo F & latere CF latus CB (§. 29.).
4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæſita AB (§. 64. *Arithm.*).

ELE-



ELEMENTA ANALYSEOS.

DE ALGEBRA AD TRIGONOMETRIAM PLANAM APPLICATA.



PROBLEMA I.

53. *D*atis basi HI trianguli cujus-
cunque & angulis ad basim II &
I, invenire altitudinem.

Sit $HI=a$, $LM=x$, finus anguli
 $ML=s$, ejus Cosinus= c ; finus anguli
 $LHM=p$, ejus Cosinus= q . Erit (§. 28.)
 $s : x = c : MI$ & $p : x = q : HM$. Unde
reperitur $MI = cx : s$ & $HM = qx : p$ (§.
215. *Arithm.*). Quare (§. 65. *Arithm.*).

Tab III.
Fig. 20

$$\begin{array}{r} cx : s + qx : p = a \\ \hline \quad \quad \quad sp \\ pcx + sqx = asp \\ \hline \quad \quad \quad pc + sq \\ x = asp : (pc + sq) \end{array}$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc + sq : sp = a : x$$

resoluta sequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL basis HI est ad altitudinem ML ut summa rectangulorum ex sinu anguli obliqui ad basin unius in Cofinum alterius se habet ad rectangulum ex finibus angulorum ad basin.

Aliter.

Sumatur ML pro sinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, seu cotangentes datorum H & I. Sint sinus totus $= t$, Cotangentes $= m$ & n , LM $= x$, HI $= a$; erit $t : m = x : HM$ & $t : n = x : MI$ (§. 32., consequenter HM $= mx : t$, MI $= nx : t$, adeoque (§. 65. *Arithm.*).

$$a = (mx + nx) : t$$

$$\text{-----} t$$

$$at = mx + nx$$

$$\text{-----} m + n$$

$$at : (m + n) = x$$

Theorema. Basis trianguli est ad altitudinem ut summa Cotangentium angulorum ad basin ad sinum totum.

PROBLEMA II.

Tab. III.
Fig. 20.

54. Datis summa crurum HL + LI una cum angulis ad basin H & I, invenire crura HL & LI.

Sit

Sit $HL + LI = a$, sinus $H = m$, sinus $I = n$, $HL = x$, erit $IL = a - x$. Quare (§. 28.).

$$\begin{array}{r} x : n = a - x : m \\ \hline mx = na - nx \\ \hline mx + nx = na \\ \hline x = na : (m + n) \\ a - x = (ma + na - na) : (m + n) \\ \hline = ma : (m + n) \end{array}$$

Theorema. Summa crurum trianguli $HL + LI$ est ad crus unum HL ut summa finuum angulorum ad basin H & I ad sinum anguli I cruri isti HL oppositum.

PROBLEMA III.

55. *Datis angulis ad basin H & I una cum segmento baseos uno HM invenire segmentum alterum MI .* Tab. III. Fig. 20.

Sit $HM = a$, $MI = x$, sinus anguli $H = m$, ejus Cofinus $= n$; sinus anguli $I = p$, ejus Cofinus $= q$. erit (§. 28.) $n : a = m : ML$. Reperitur adeo $ML = am : n$. Porro vi §. cit. $q : x = p : ML$. Reperitur itaque $ML = px : q$. Quare (§. 60. *Arithm.*).

$$\begin{array}{r} px : q = am : n \\ \hline - nq \\ \hline pnx = amq \\ \hline x = amq : pn \end{array}$$

EE

Est adeo $pn:mq=a:x$

Theorema. Si ex vertice trianguli L. in basin HI perpendiculum demittitur; segmentum unum HM est ad alterum MI ut rectangulum ex sinu anguli segmento MI adjacentis in Cofinum anguli segmento HM adjacentis ad rectangulum ex sinu anguli H in Cofinum anguli L.

PROBLEMA IV.

Tab. III. 56. *Data area trianguli rectanguli*
Fig. 19. *ABC una cum angulo C, invenire crura*
AB & BC.

Sit $area=b^2$

$BC=x$

Sint totus $=r$ erit $BA=2b^2:x$ (§. 304.)

Tangens $C=t$ Geom.)

Quare (§. 32. Trigon.)

$$x:2b^2=r:t$$

$$\frac{x}{x^2:2b^2=}$$

$$x^2=rb^2:t$$

$$x=\sqrt{2rb^2:t}$$

Theorema: Area trianguli rectanguli est ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad sinum totum.

Tab. III. *Constructio.* Sit EDA angulus datus. Fint
Fig. 22. $DA=2b$ & erigatur AE perpendicularis ad
 DA : erit simul $DA=r$ & $AE=t$ (§.
7.) Producat EA in infinitum & in
D erigatur ad ED perpendicularis DG,
erit

erit $AG = \frac{2br}{t}$ (§. 249. *Geom.*) Fiat AH

$= AG$ & $AI = \frac{1}{2} AD = b$, erit descripto
super IH semicirculo $AL = \sqrt{\frac{2b^2r}{t}}$ Fiat

denique $AB = AL$ & ducatur BC cruri an-
guli dati DE parallela; erit triangulum BAC
quæsitum.

PROBLEMA V.

57. *Datis in quadrilatero circulo inscrip-
to lateribus AE, EB, BC & AC una cum
diagonali EC, invenire diagonalem AB.*

Tab. III.
Fig. 23.

Sit $AE = a$, $EB = b$, $BC = c$, $AC = d$, $EC = f$, $AB = y$. Ducatur EF
ita ut sit $o = x$ (§. 171. *Geom.*).
Quoniam præterea $ACE = ABE$ (§.
239. *Geom.*); erit $EC : AC = EB : BF$,
hoc est, $f : d = b : BF$ (§. 206.
Geom.). Reperitur ergo $BF = bd : f$.
Quoniam porro $EAB = ECB$ (§. 239.
Geom.) & $AEF = CEB$ (§. 66. *Arithm.*),
erit $EC (f) : CB (c) = EA (a) : AF$
($ac : f$) (§. 206. *Geom.*). Quare (§. 64.
Arithm.).

$$\frac{(bd + ac) : f = y}{bd + ac = fy}$$

Theorema. In quadrilatero circulo inscripto
 $AECB$ rectangulum ex diagoniis EC & AB
æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB
in AC & EA in BC .



P
I
ibid
50
61
60
78
161
169
180
ibid
231
ibid
250
278
288
294
301
316
323
ibid
336
363
367
426
436

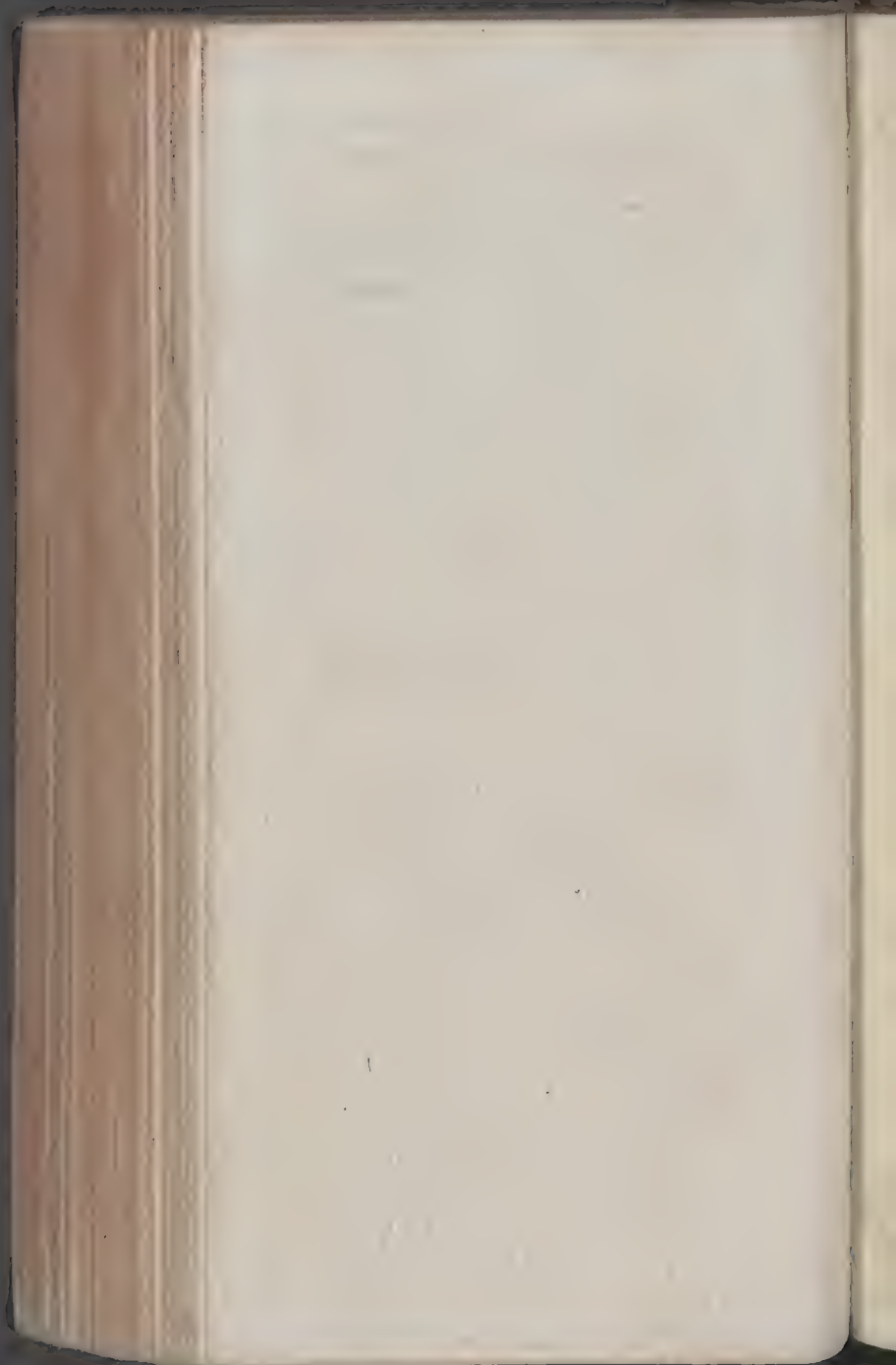
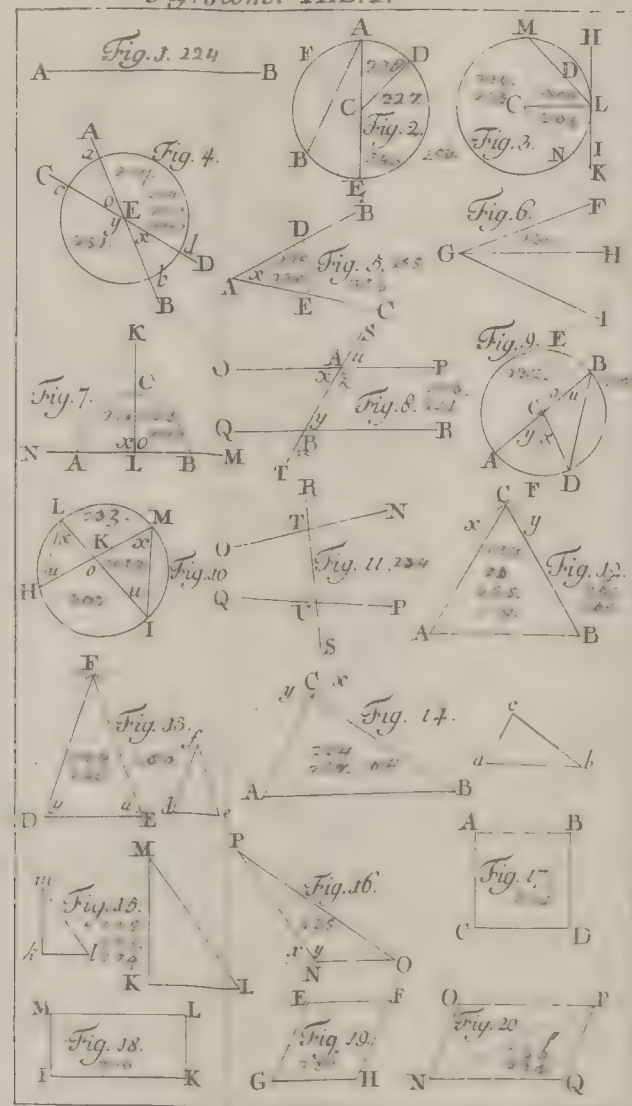


Fig. Geom. TAB. I.



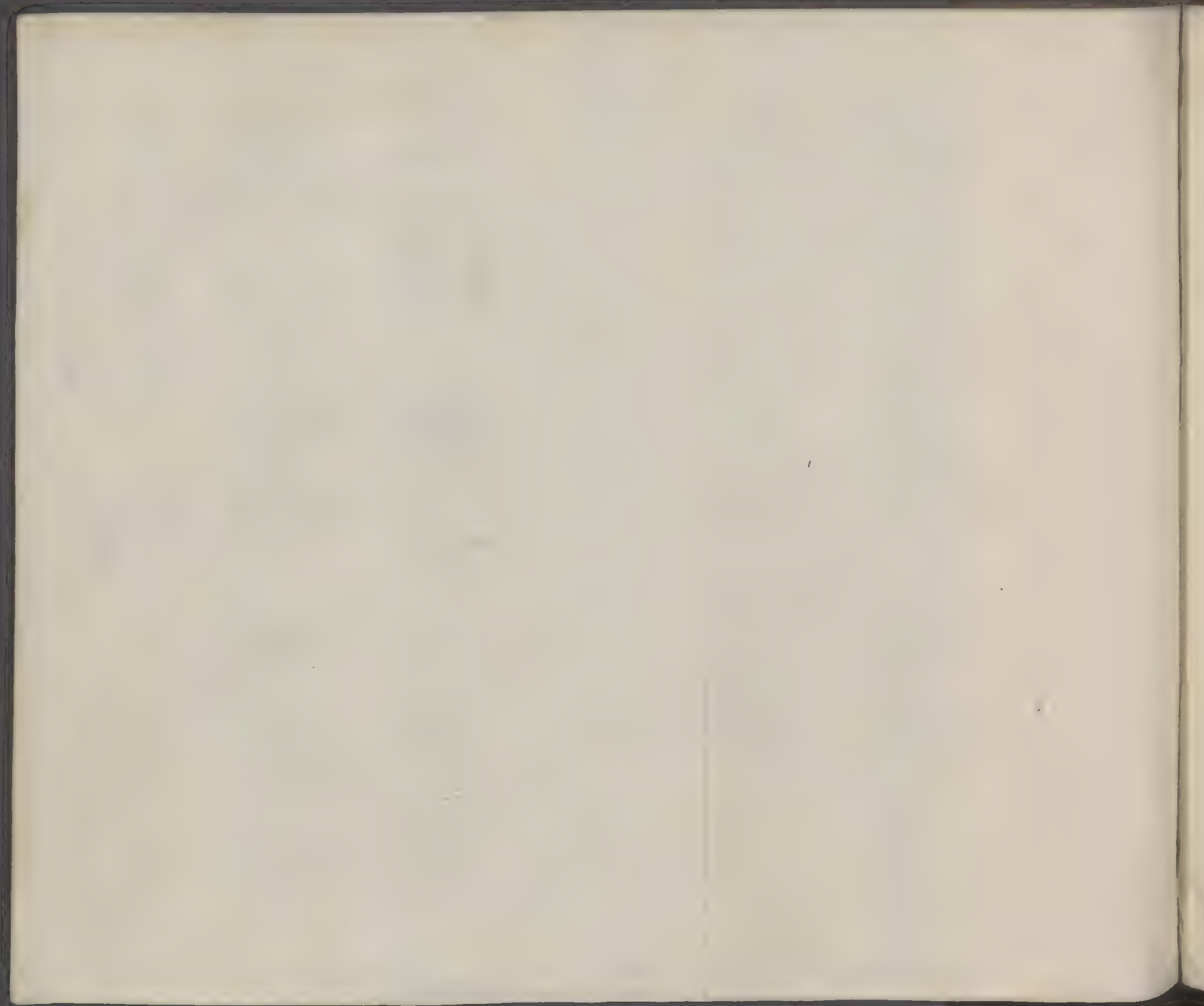
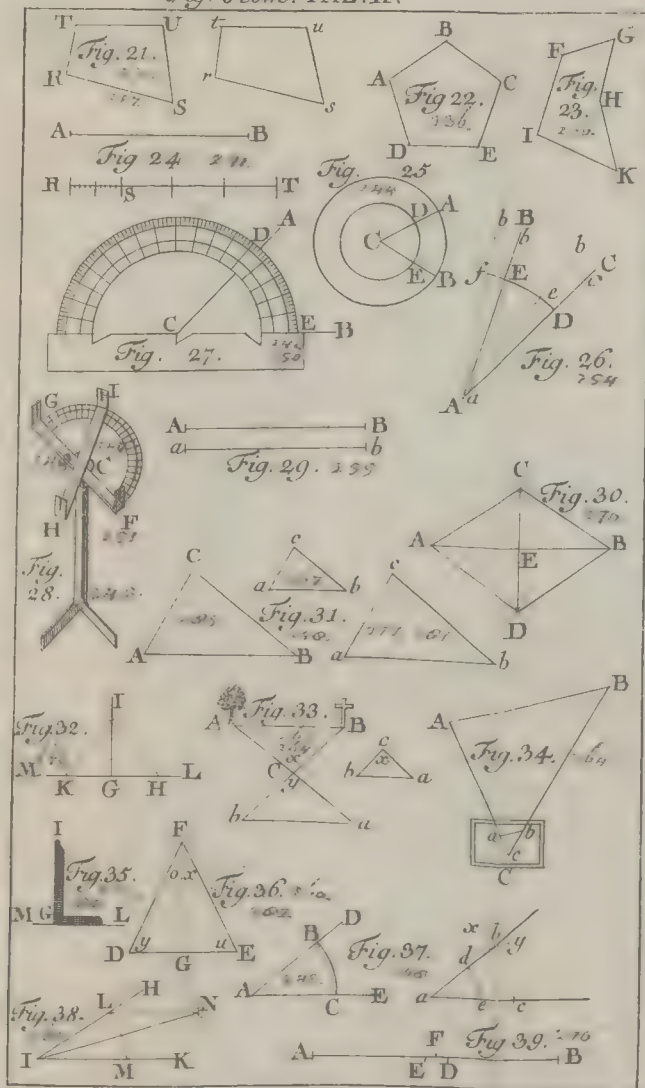


Fig. Geom. TAB. II.



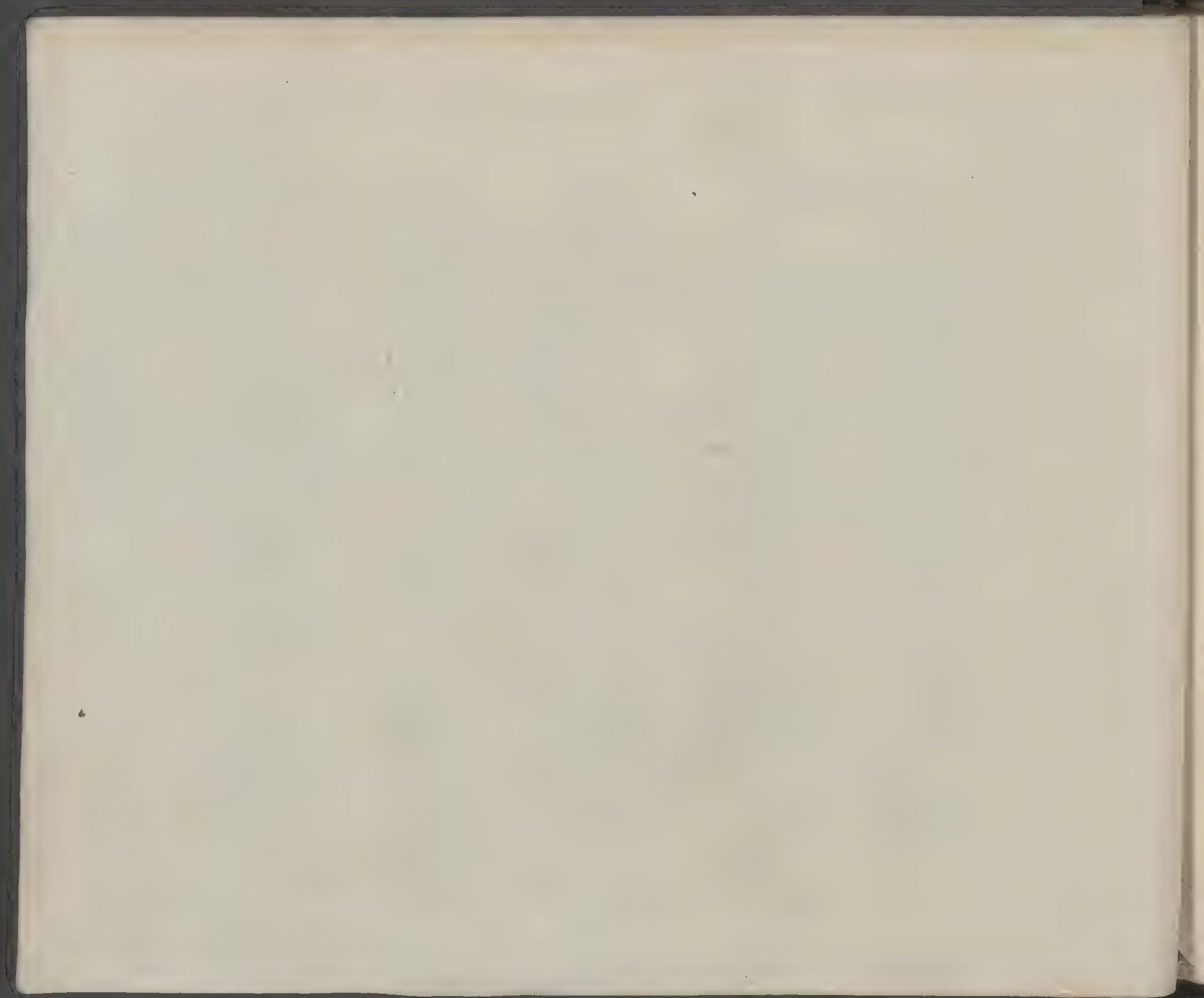
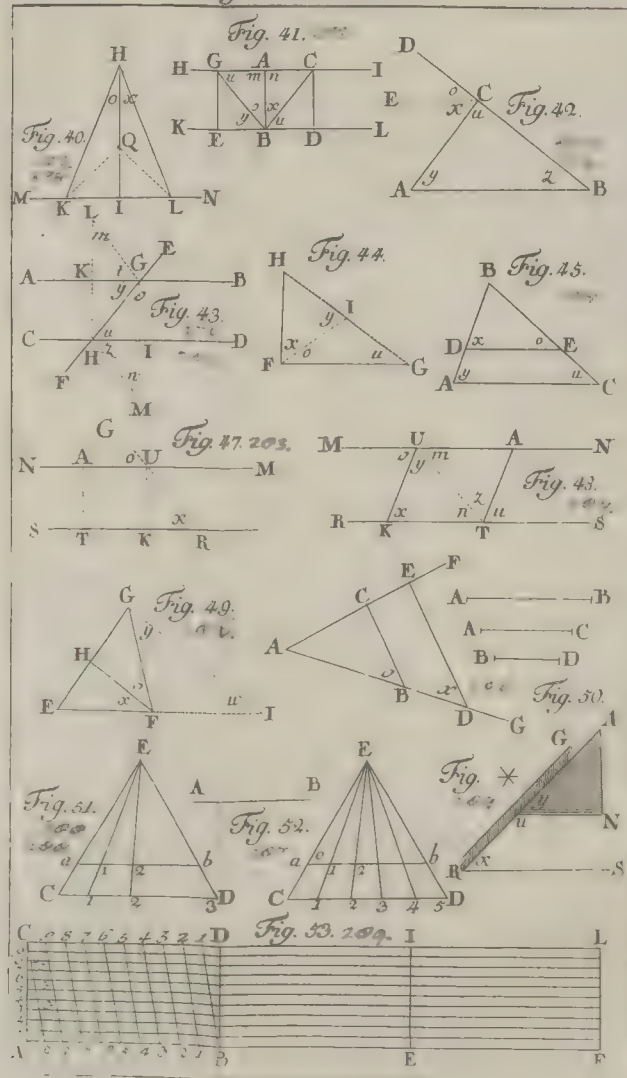


Fig. Geom. TAB. III.



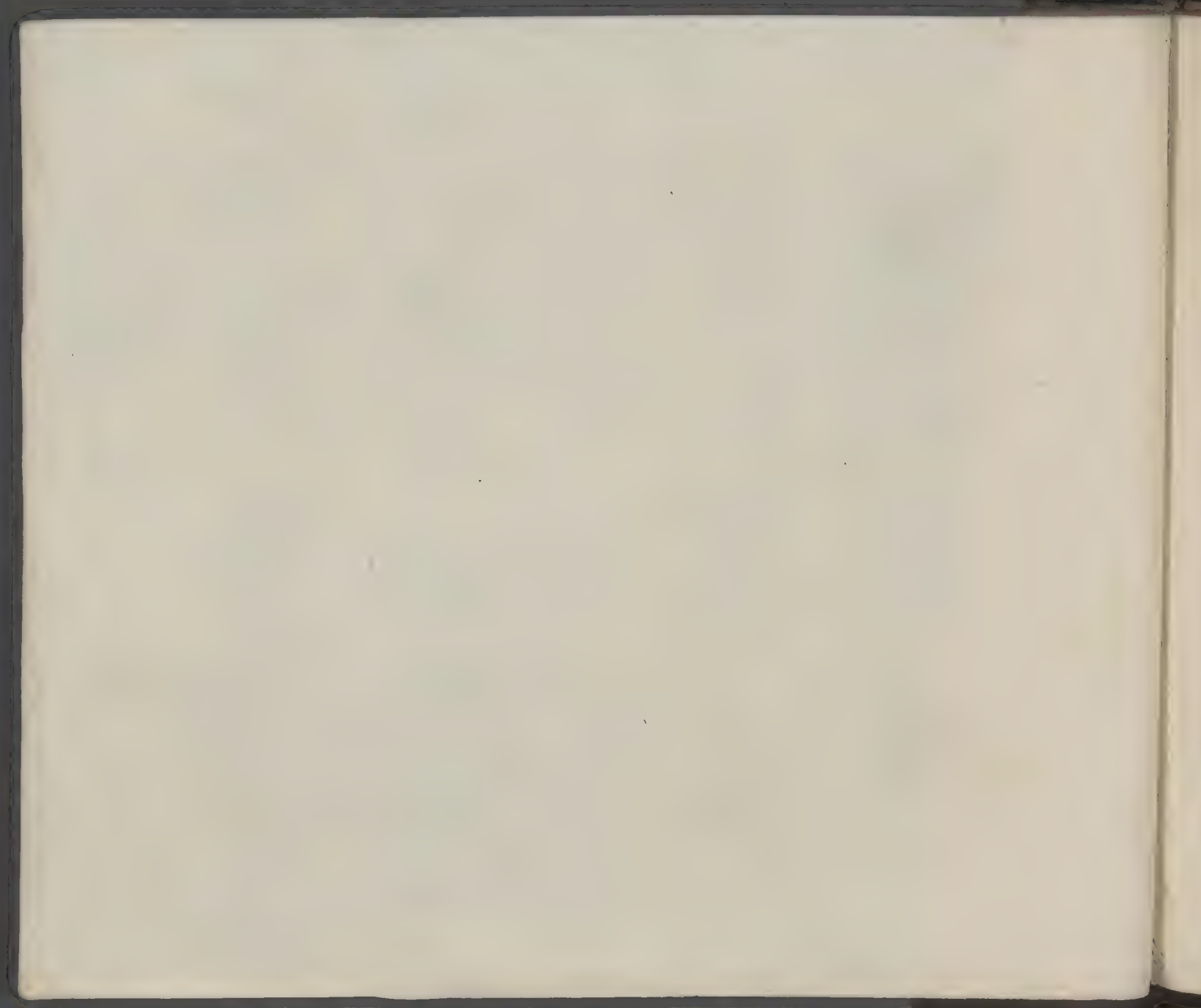
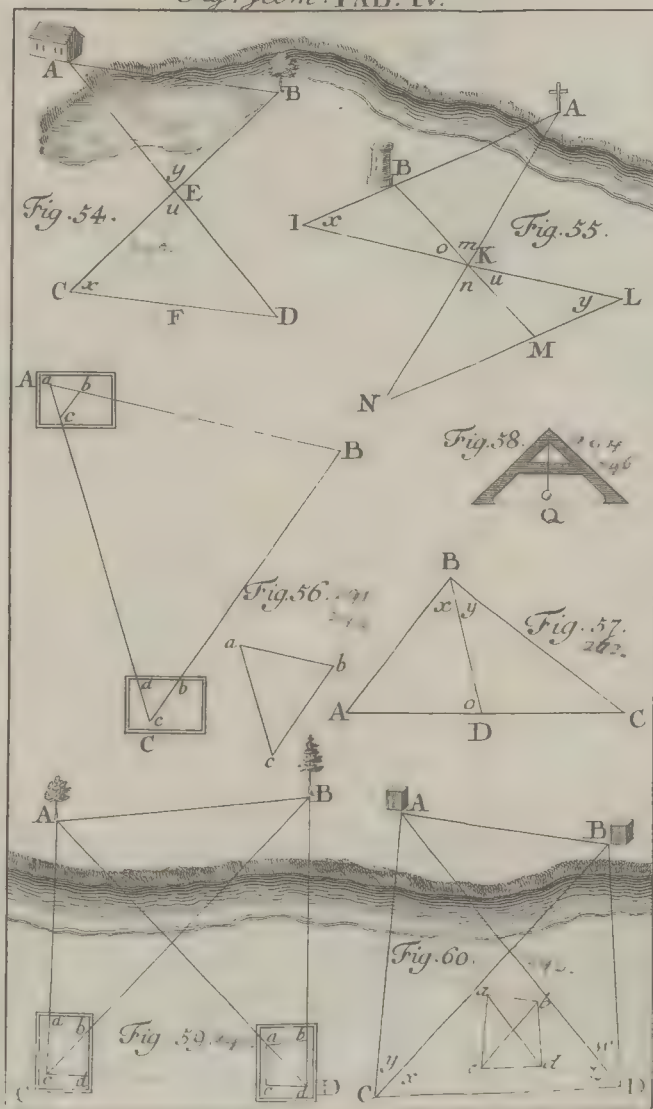


Fig. Geom. TAB. IV.



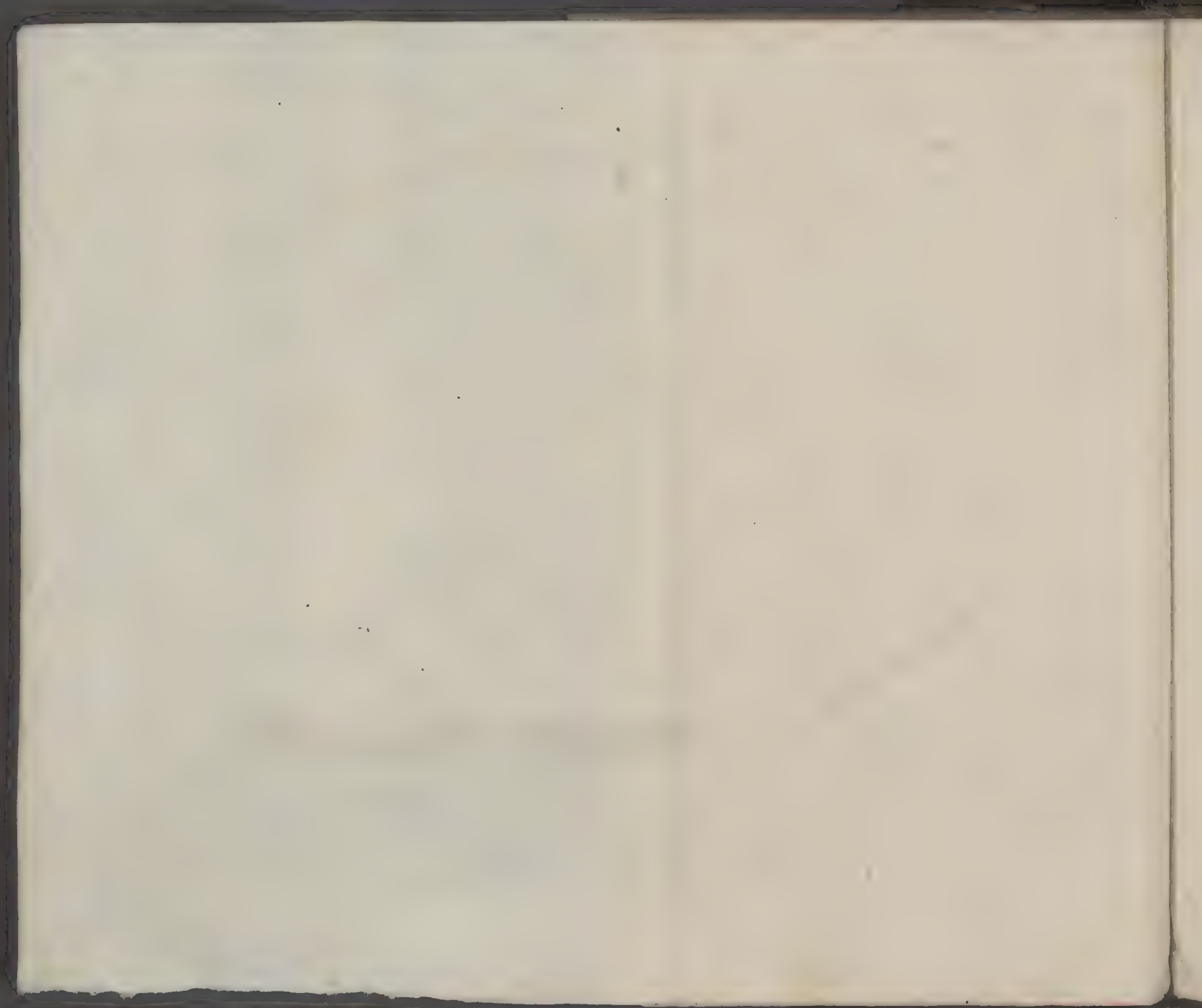


Fig. Geom. TAB.V.

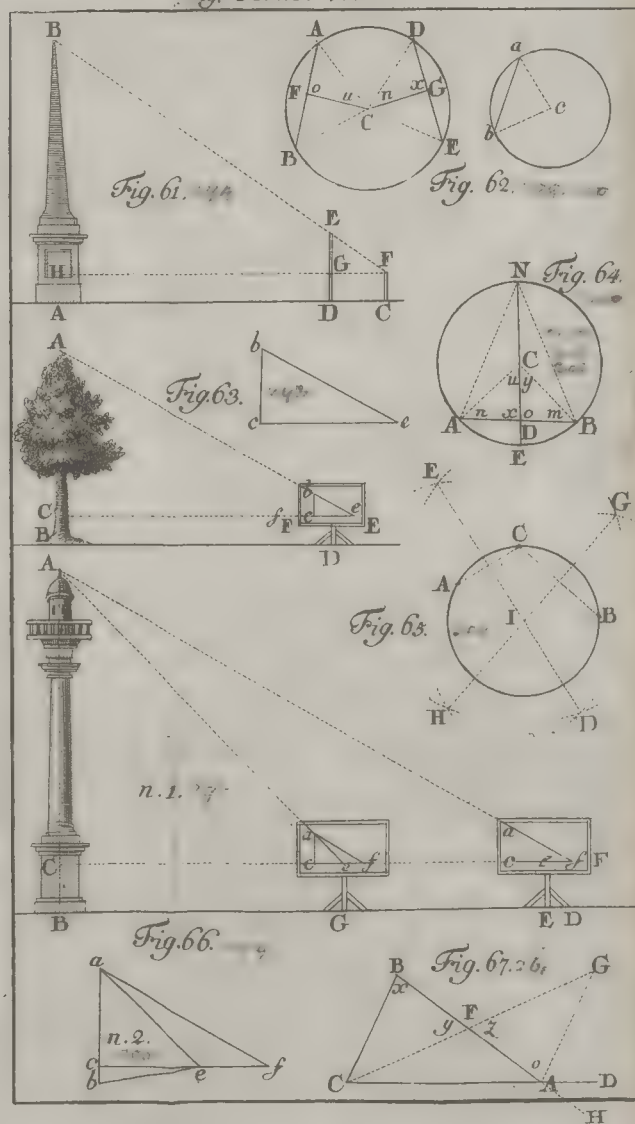
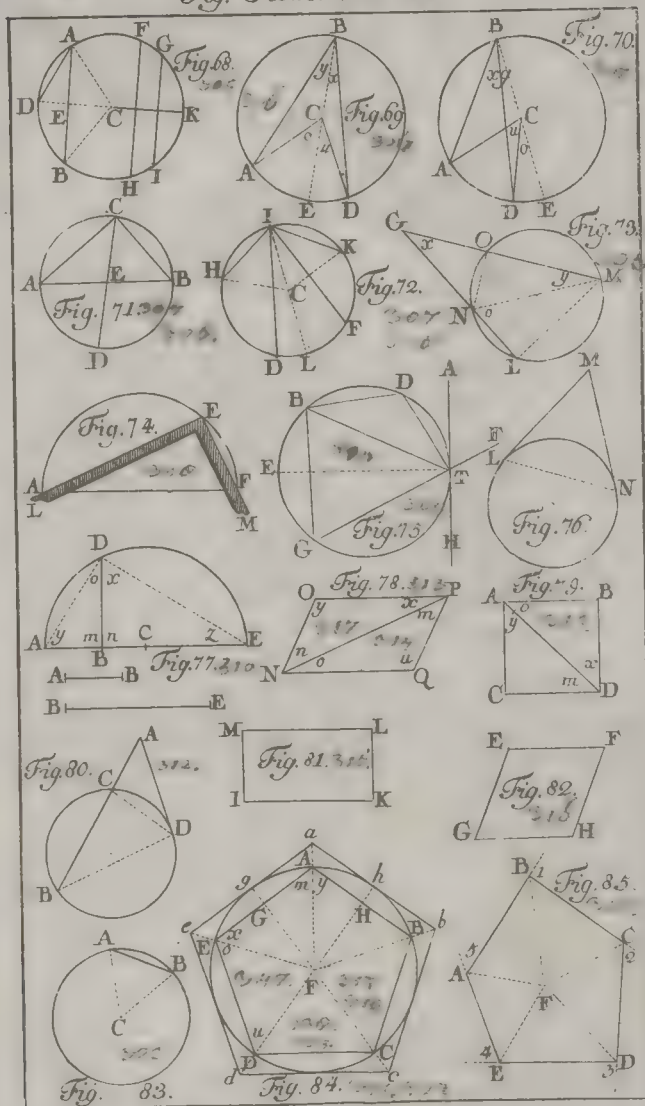
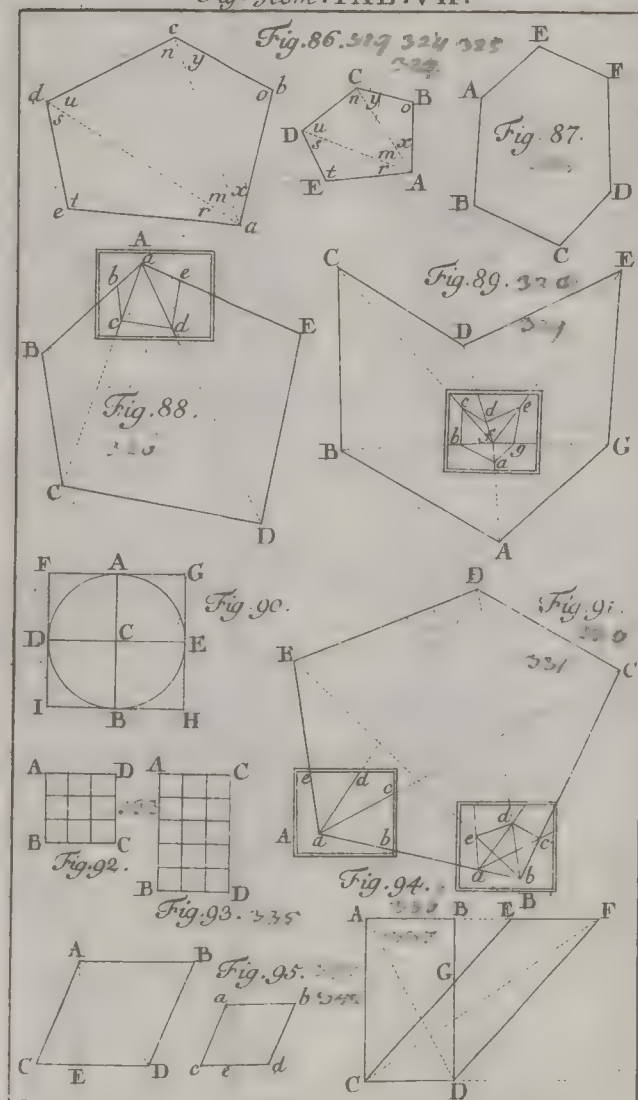




Fig. Geom. TAB. VI.









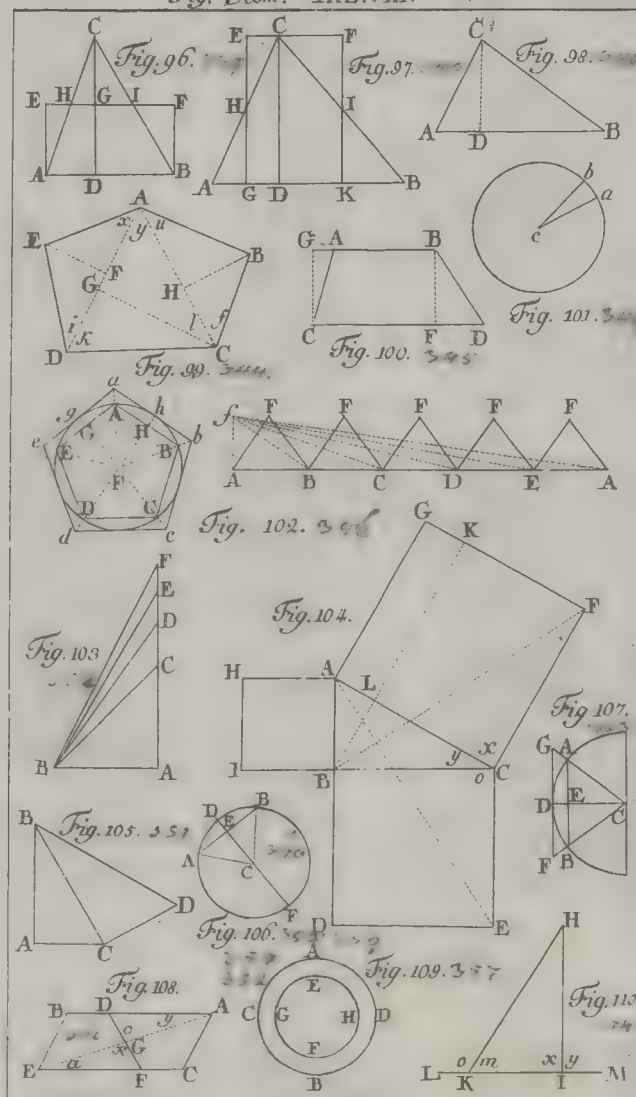
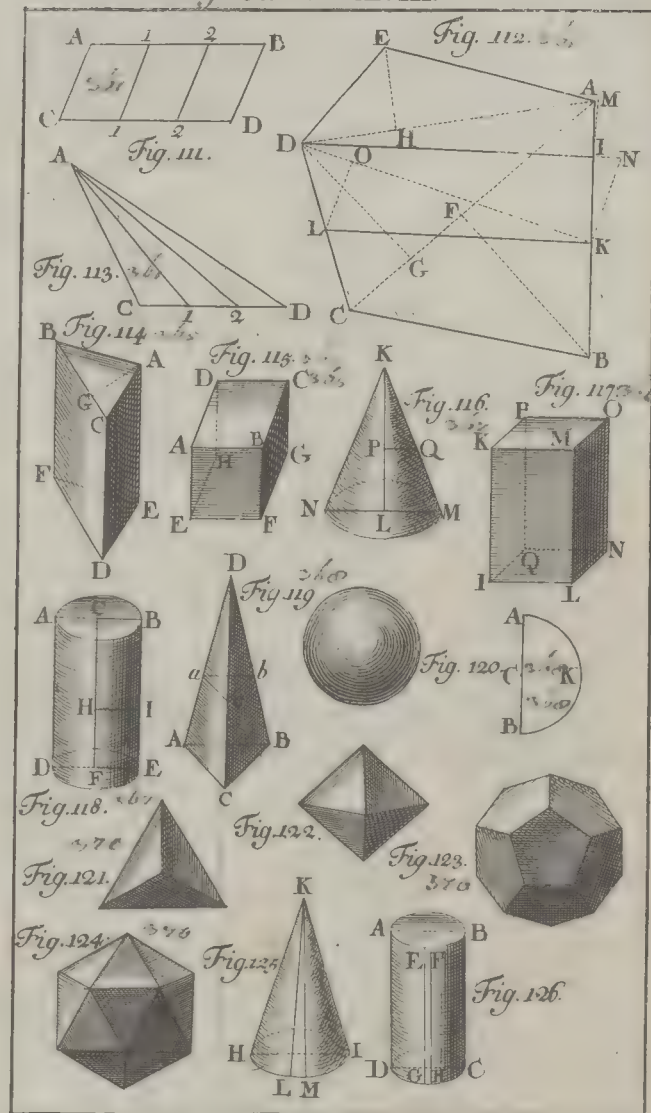




Fig. Geom. TAB. IX.



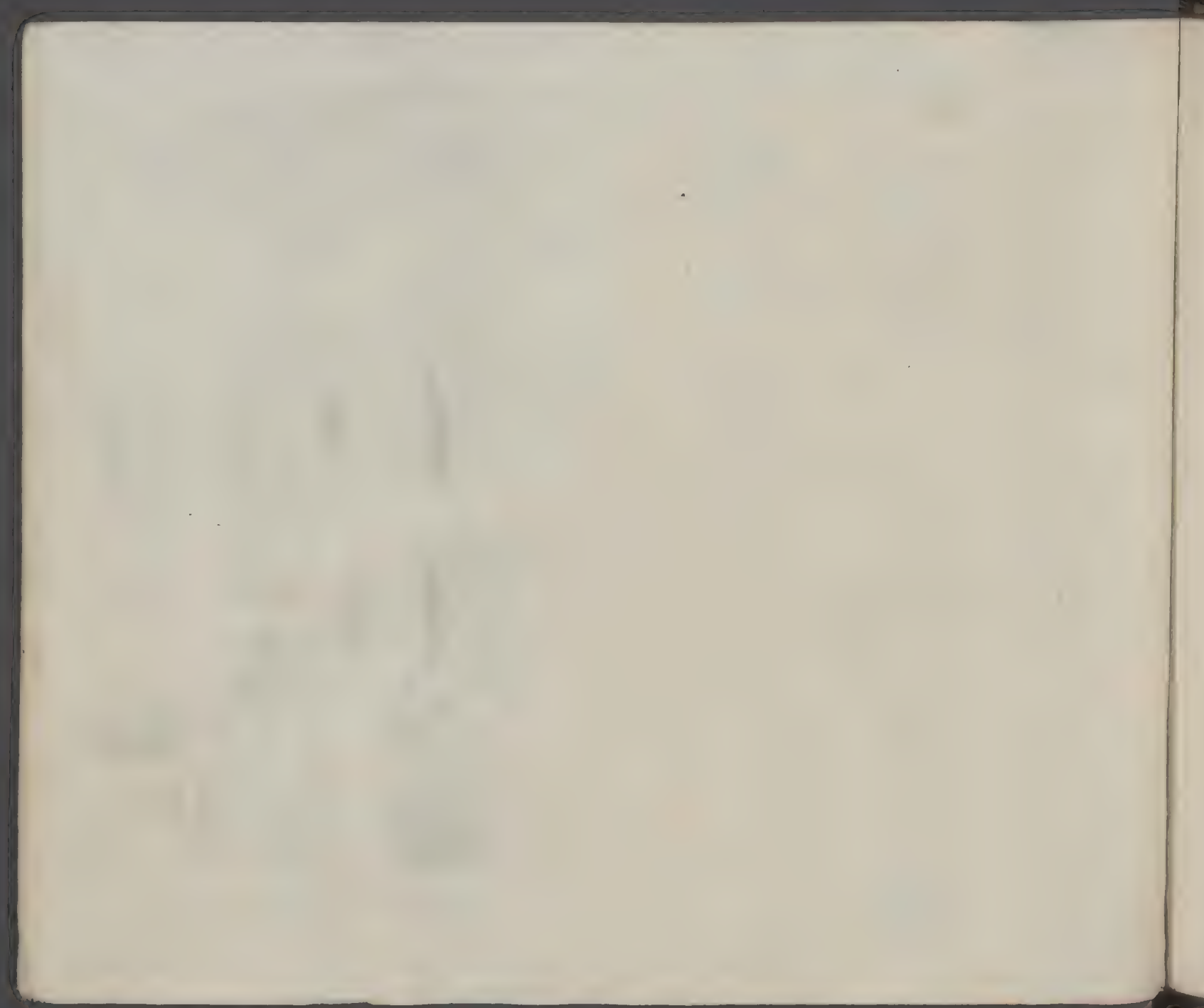


Fig. Geom. TAB. X.

Fig. 127.

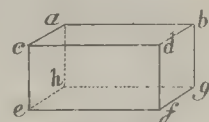
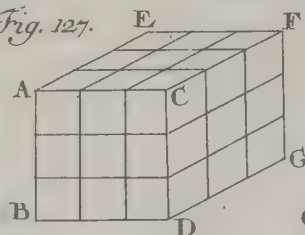


Fig. 128.

Fig. 129.

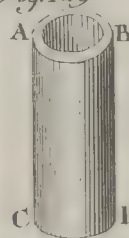


Fig. 130.

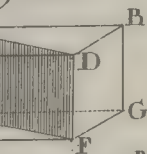
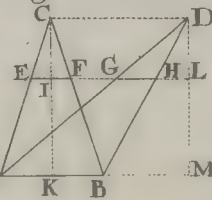


Fig. 131.

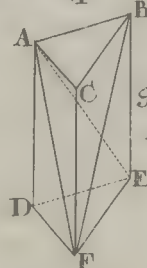


Fig. 132.

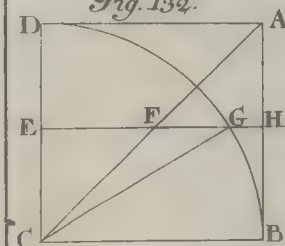


Fig. 134.

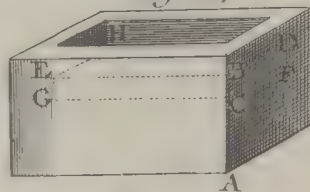


Fig. 133.

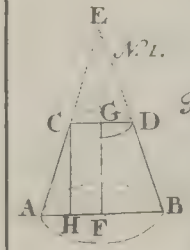
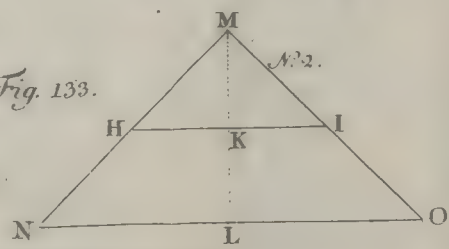


Fig. 133.



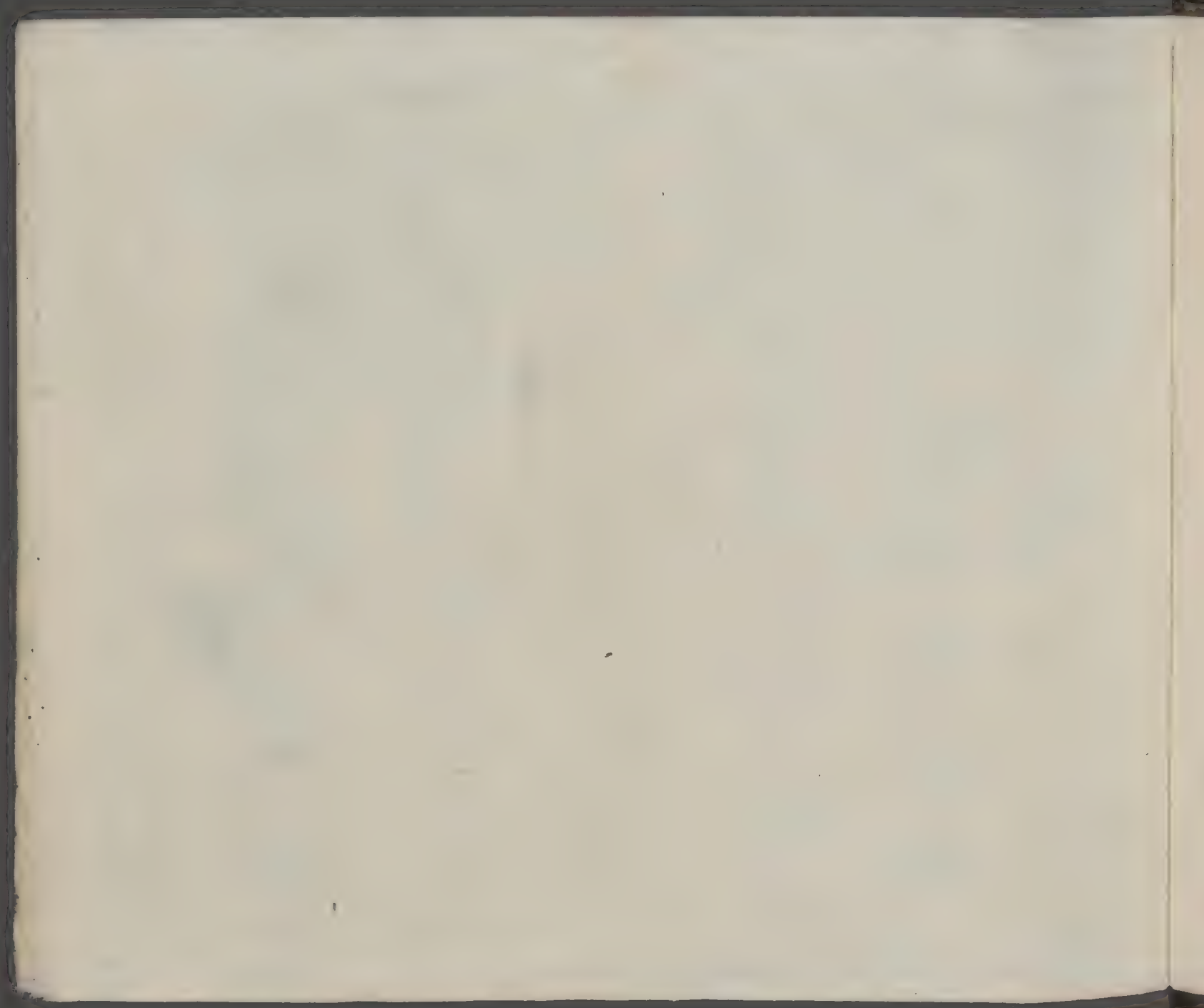
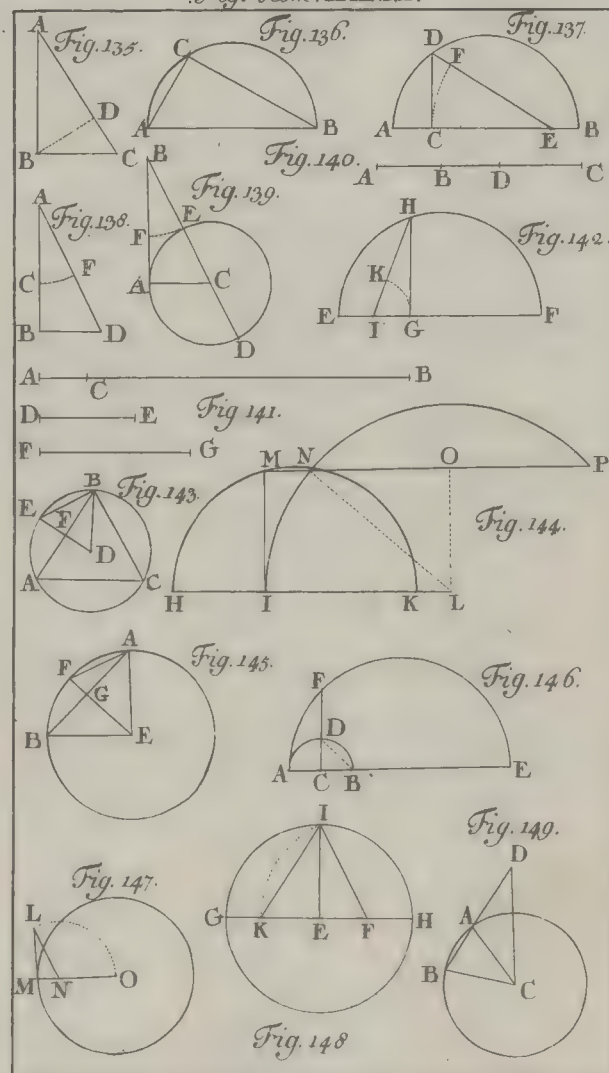


Fig. Geom. TAB. XI.



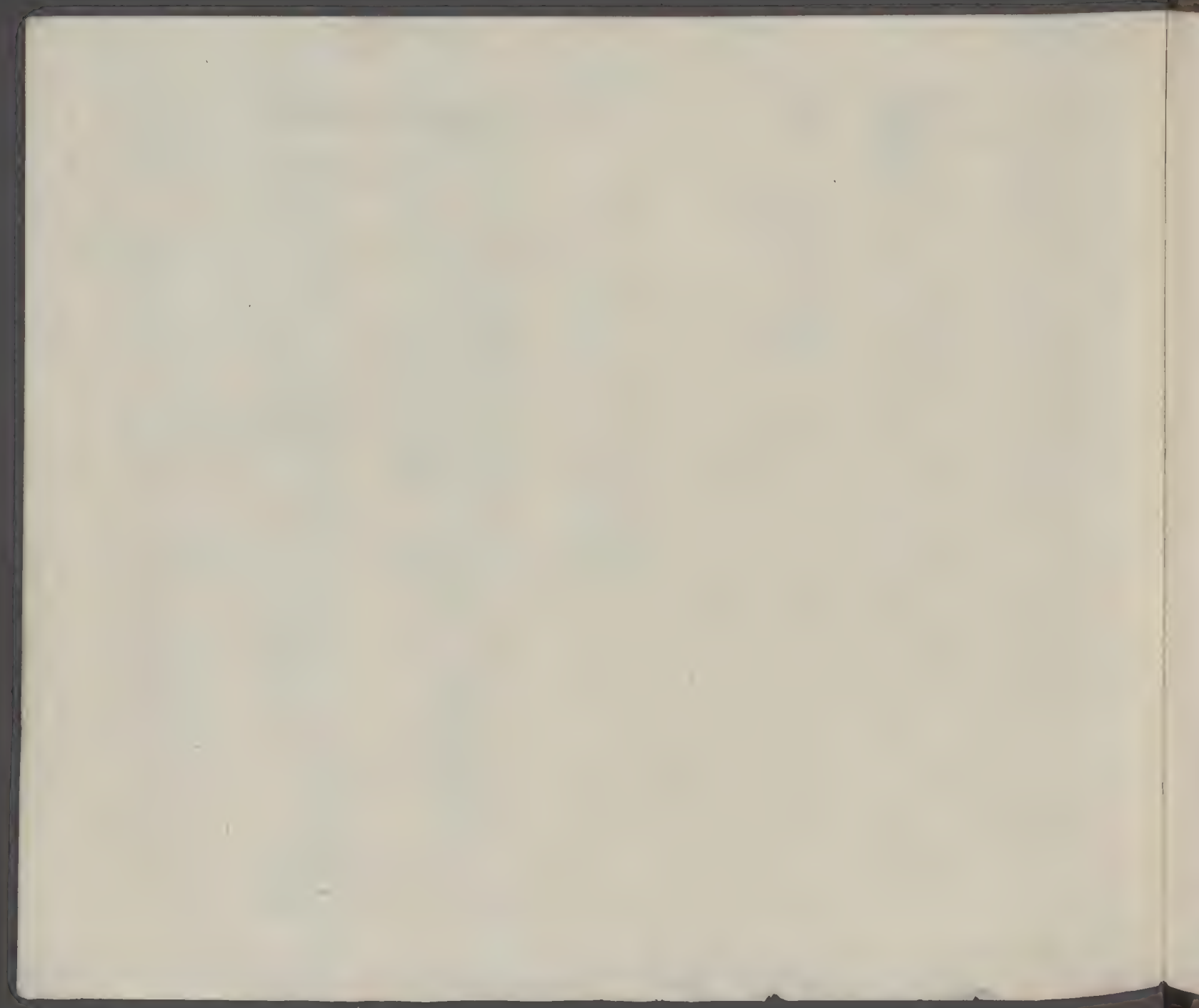
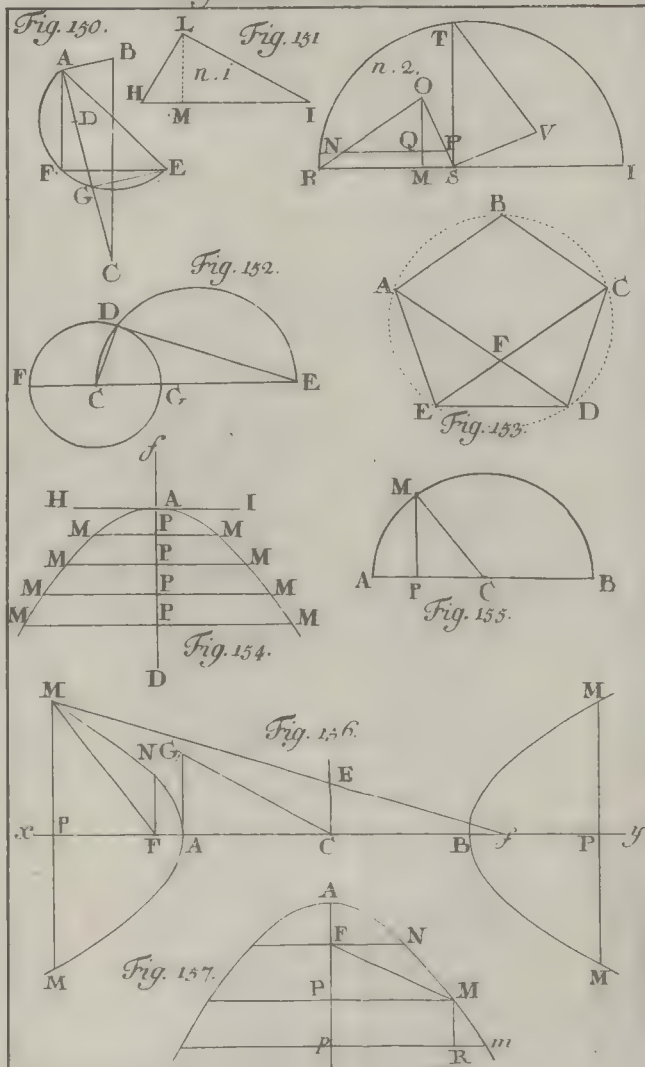


Fig. Geom. TAB. XII.



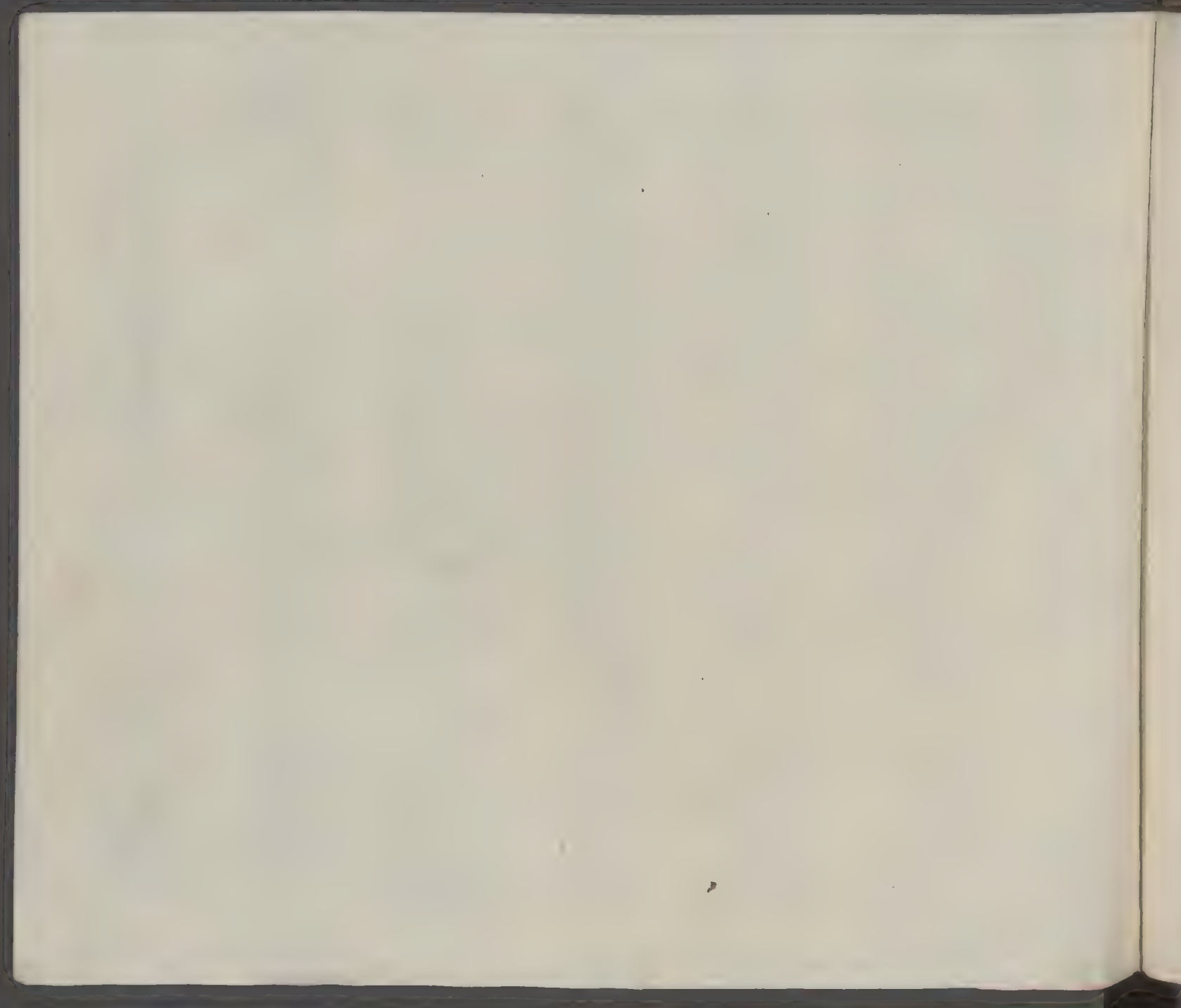
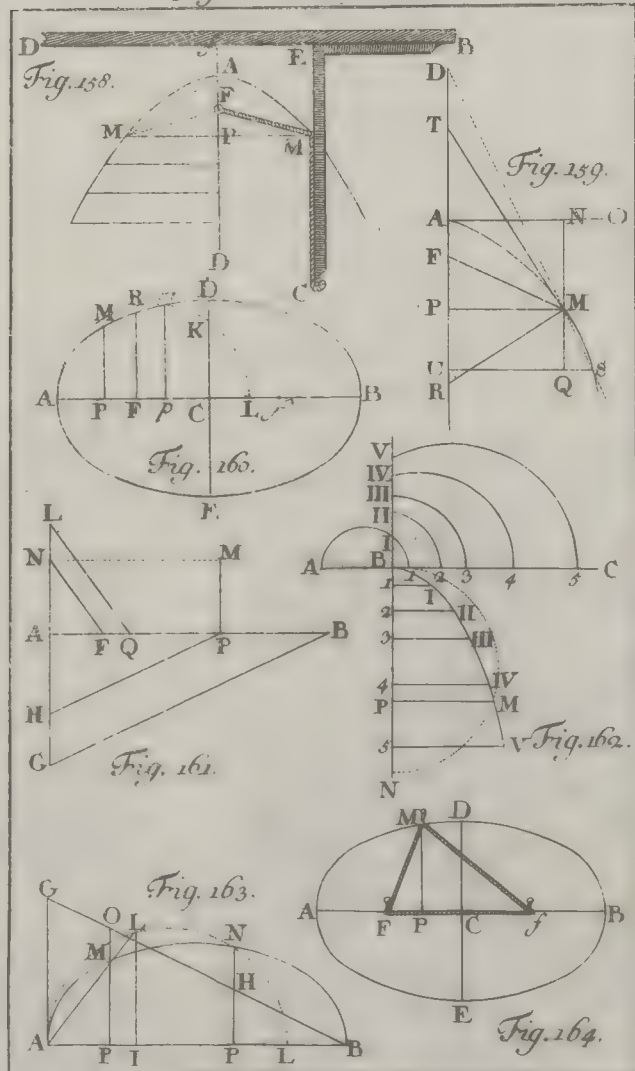


Fig. Geom. TAB. XIII.



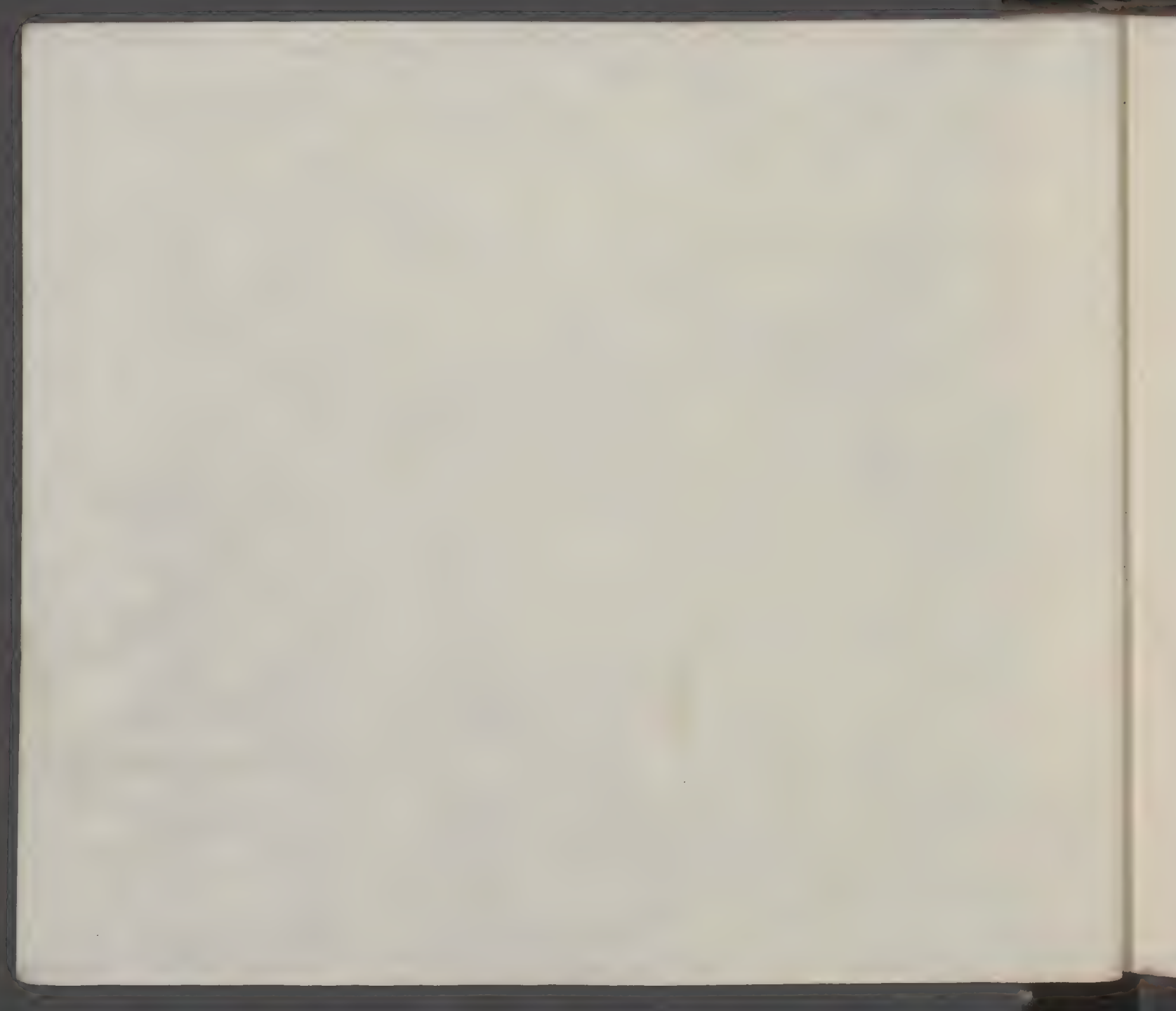
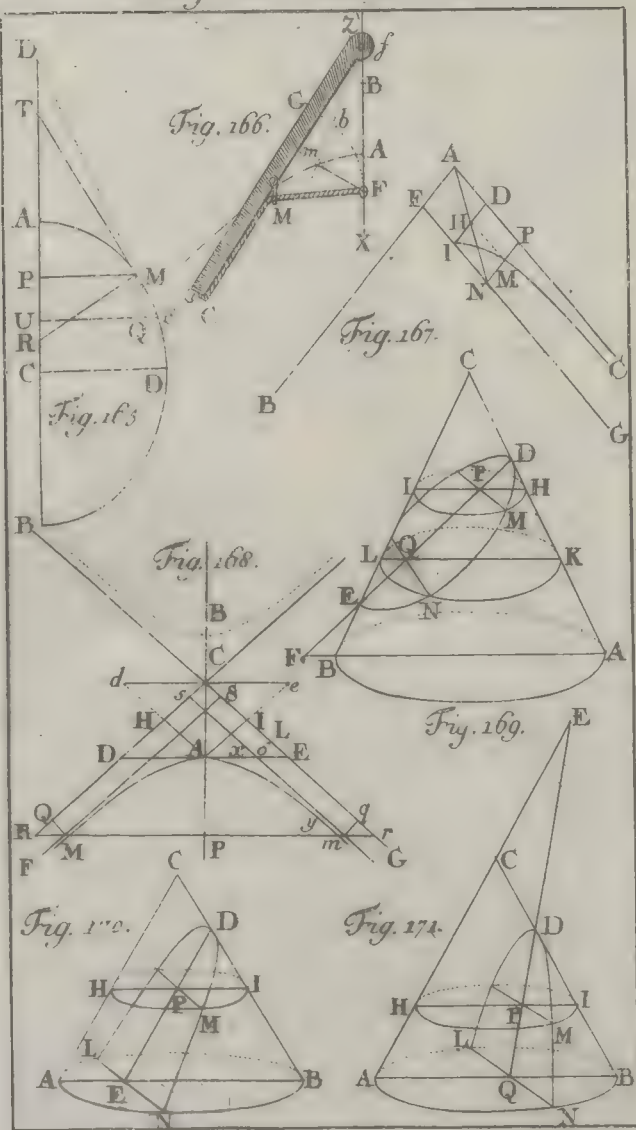


Fig. Geom. TAB. XIV.



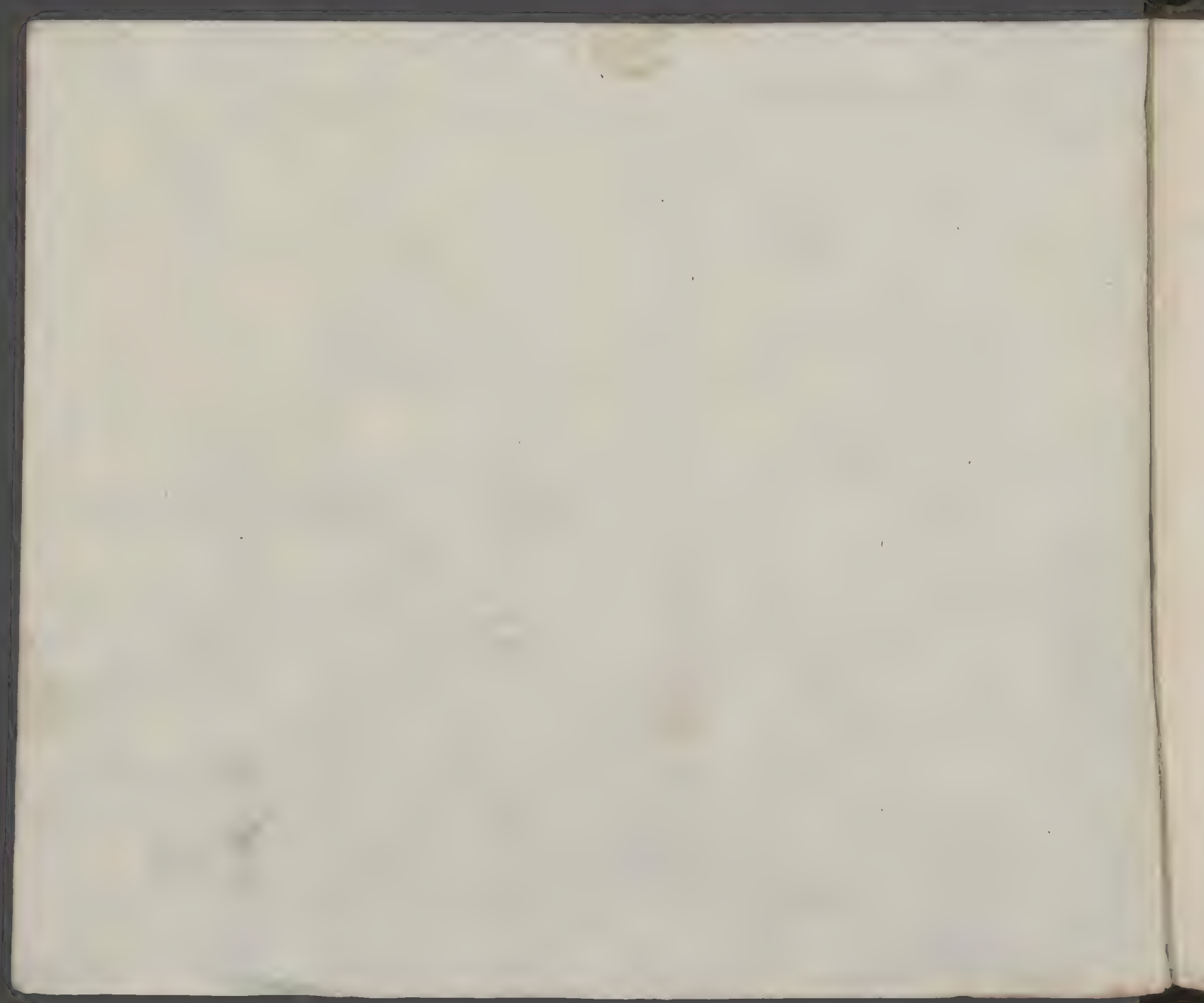
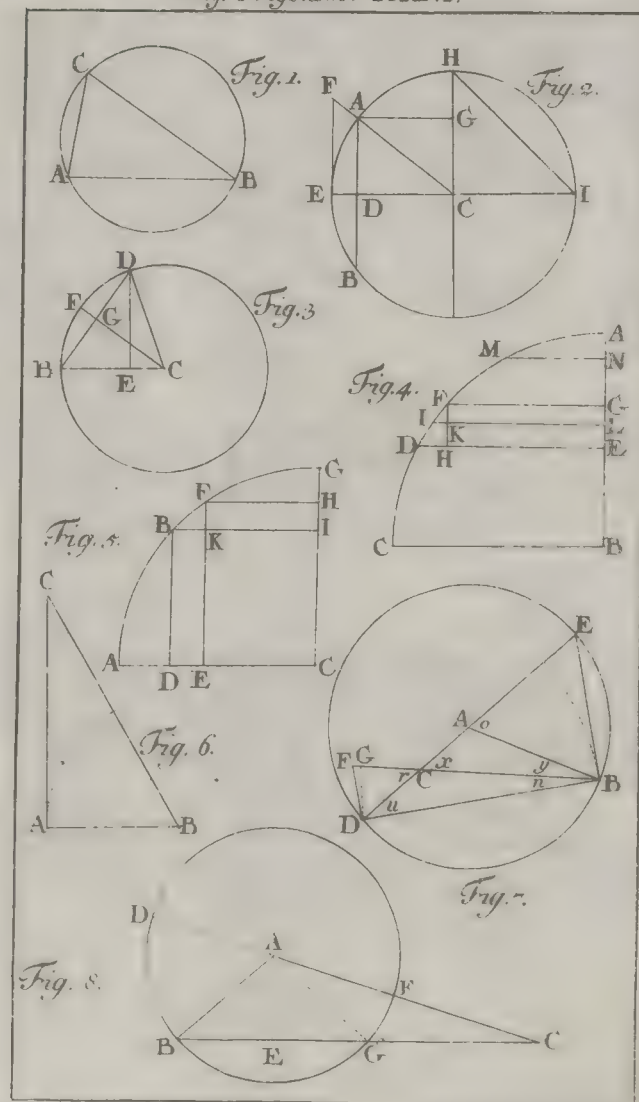


Fig. Trigonom. TAB. I.



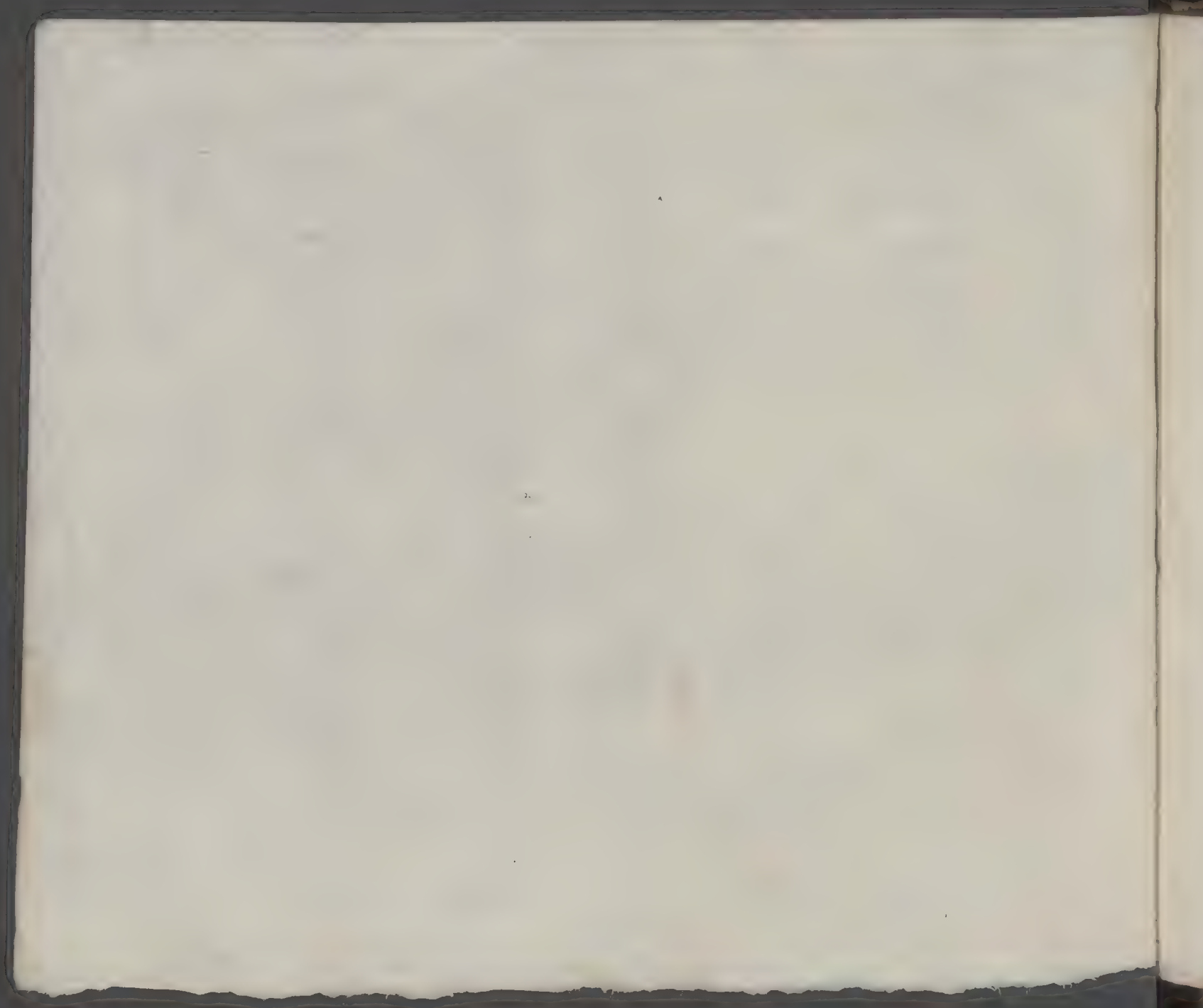
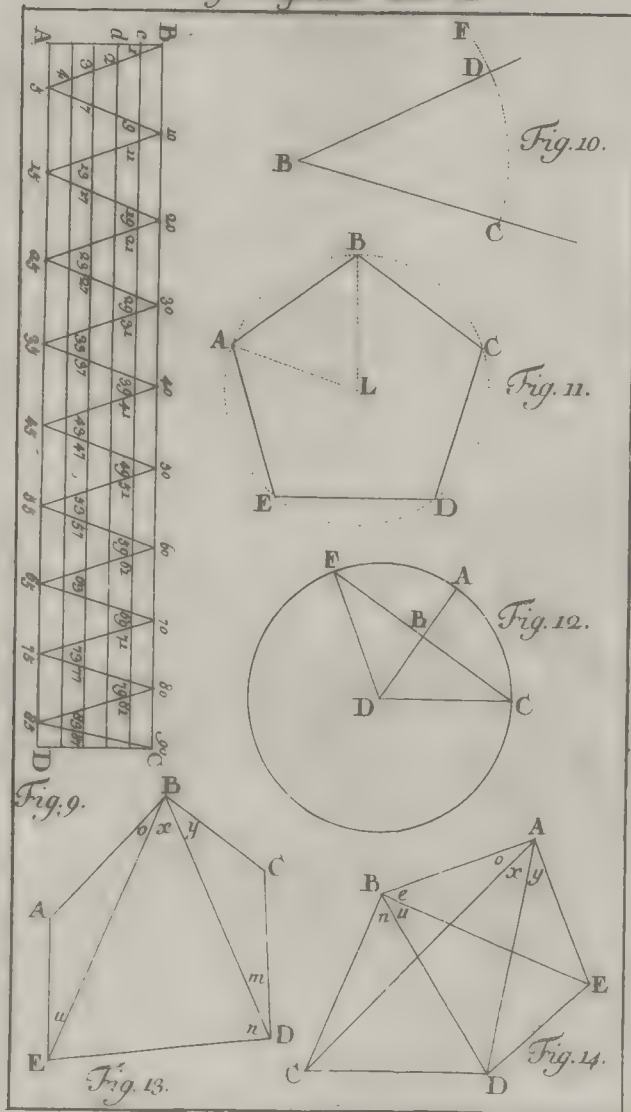


Fig. Trigonom. TAB II.



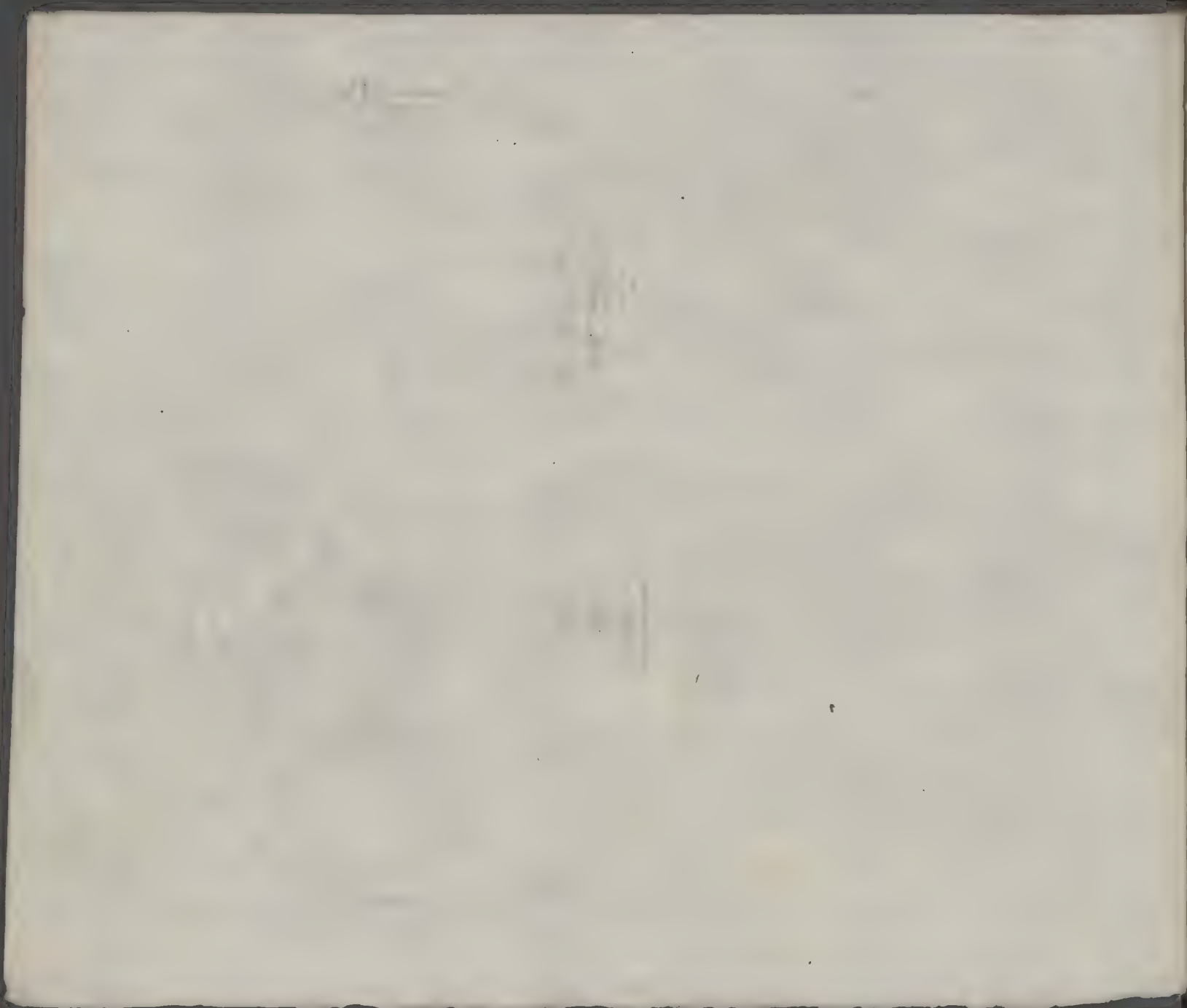
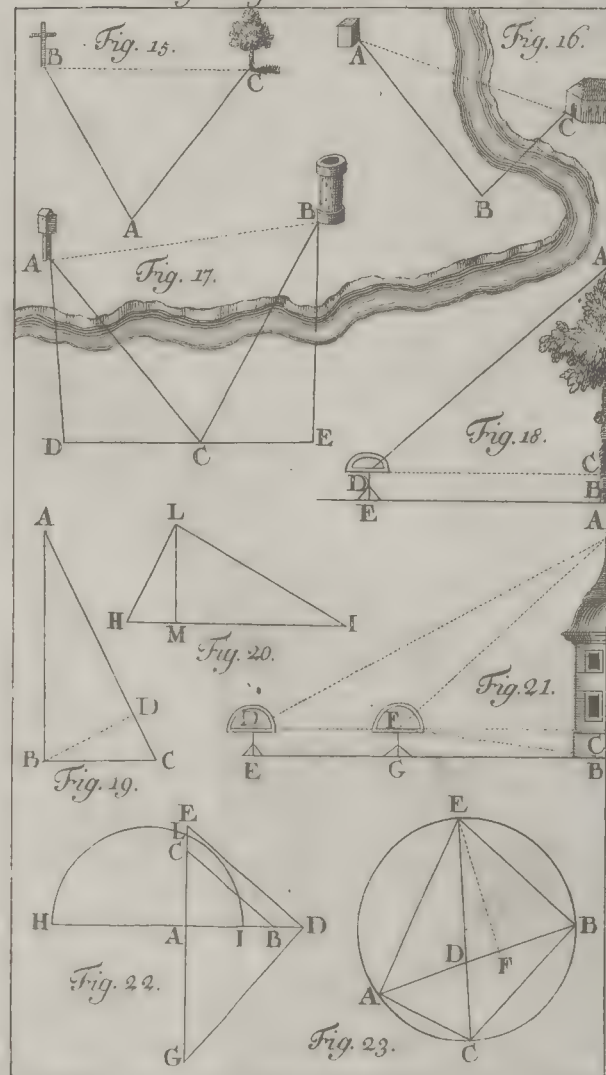
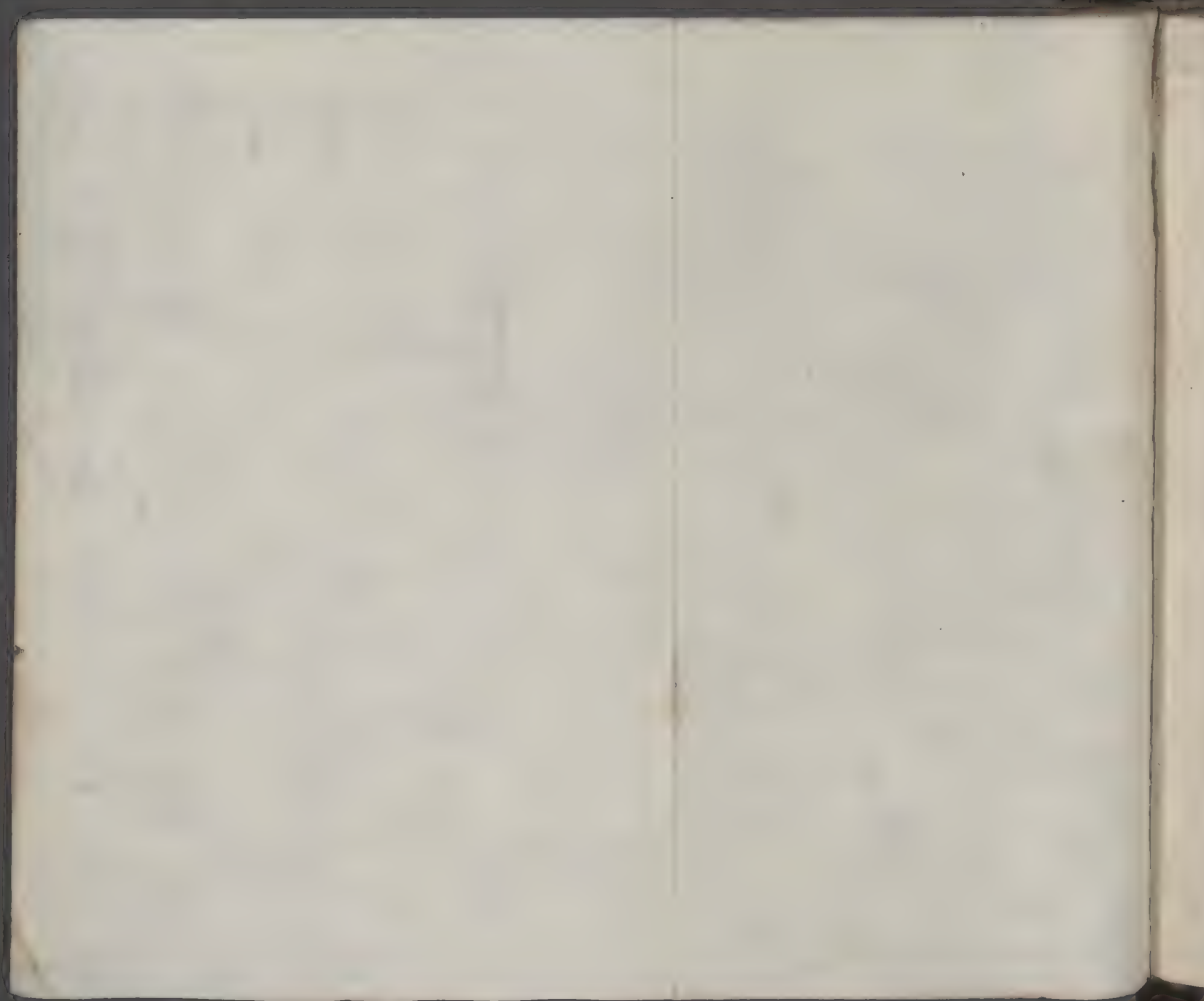
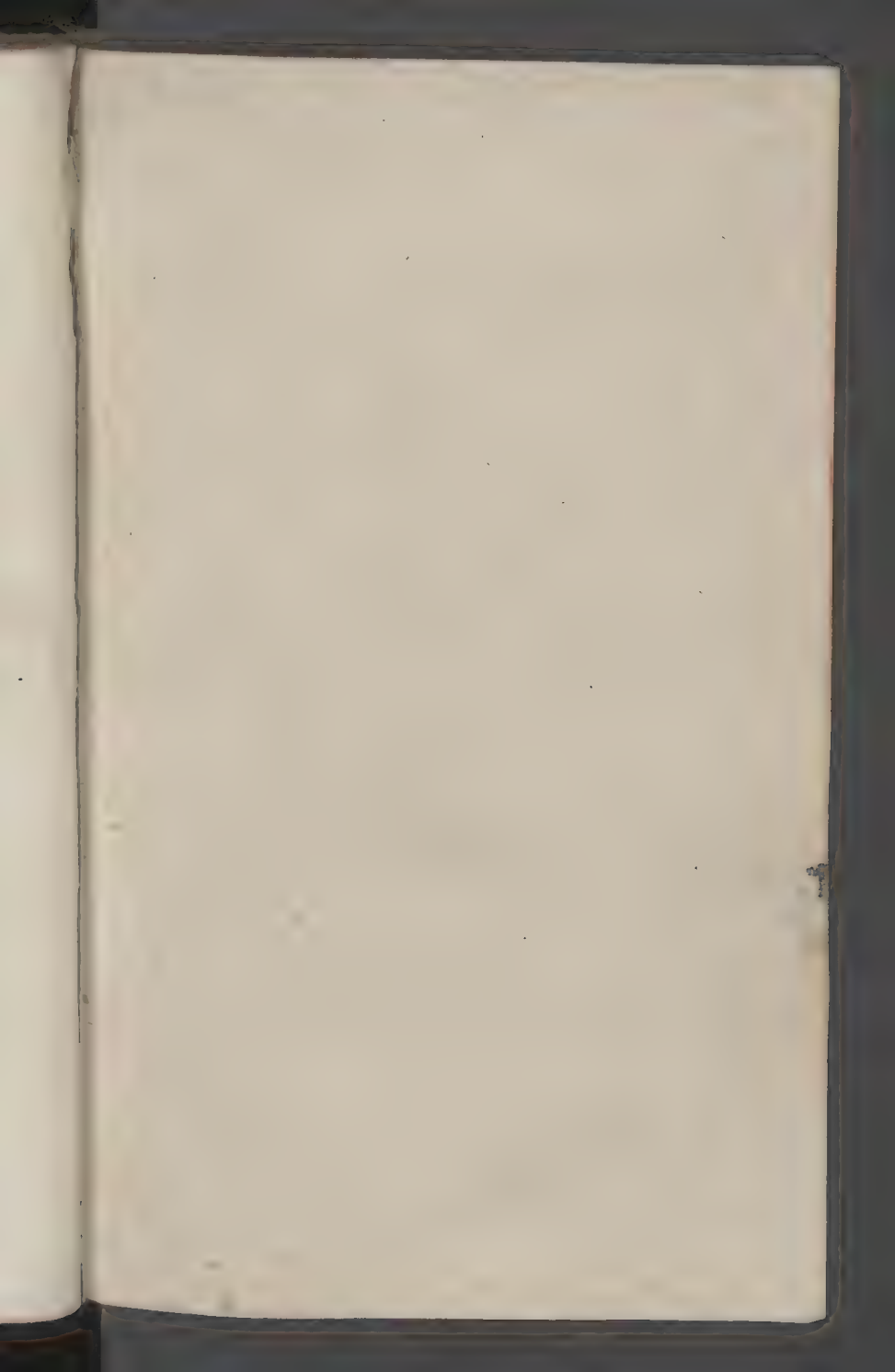


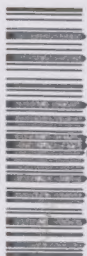
Fig. Trigonom. TAB. III.





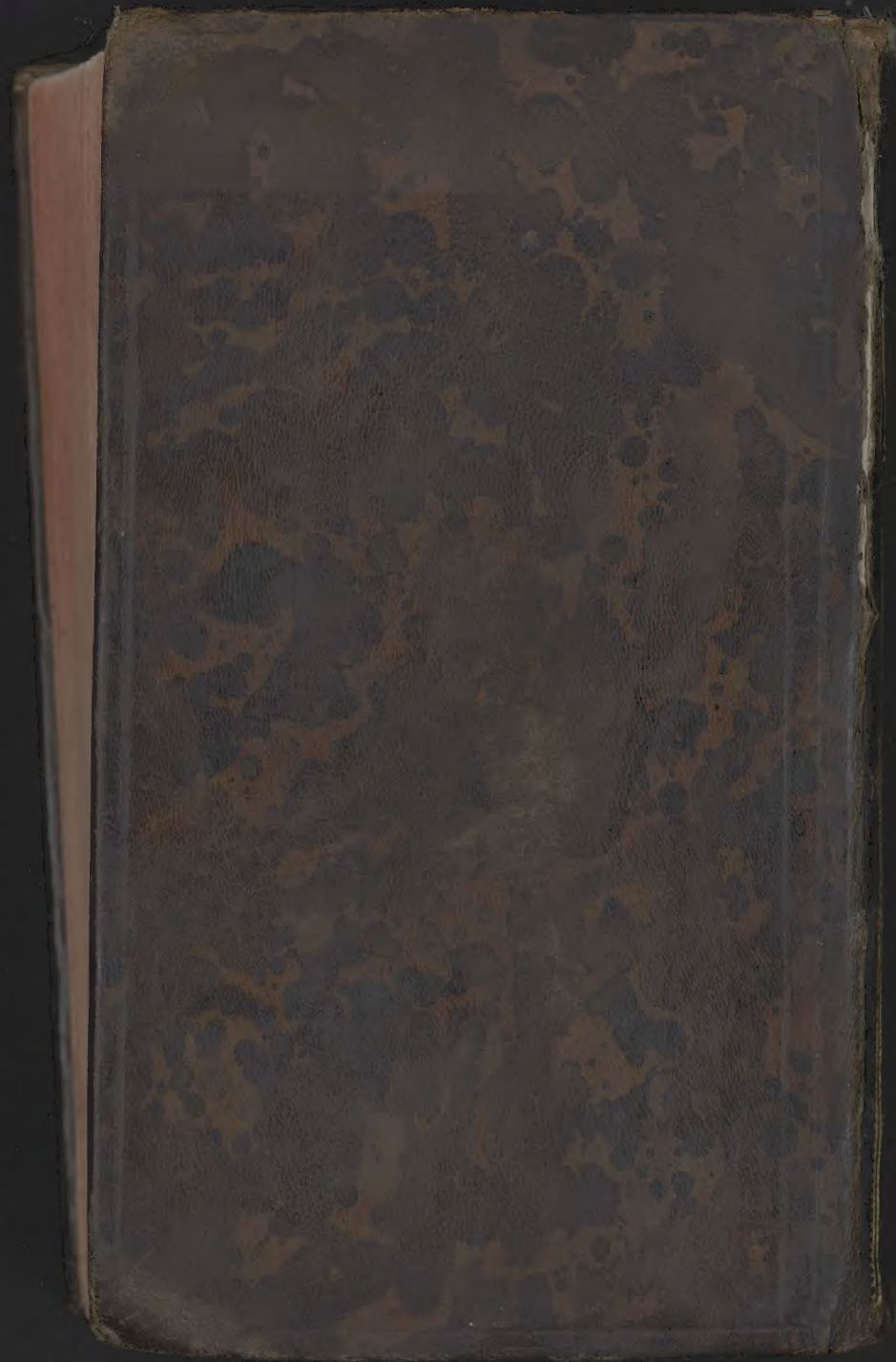






stat0029658

Biblioteka Jagiellońska



THE FIRST BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN

M
W

THE SECOND BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE THIRD BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE FOURTH BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE FIFTH BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE SIXTH BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE SEVENTH BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE EIGHTH BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE NINTH BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
THE TENTH BOOK OF THE
HISTORY OF THE
LIFE OF THE
HOLY MAN
AND
THE
LIFE OF THE
HOLY MAN